

CHUYÊN ĐỀ 21	HỆ TRỤC TỌA ĐỘ OXYZ, PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU
---------------------	--

MỤC LỤC

PHẦN A. CÂU HỎI.....	1
Dạng 1. Tìm tọa độ điểm, véc tơ liên quan đến hệ trục tọa độ OXYZ.....	1
Dạng 2. Tích vô hướng, tích có hướng và ứng dụng.....	8
Dạng 2.1 Tích vô hướng và ứng dụng.....	8
Dạng 2.2 Tích có hướng và ứng dụng.....	9
Dạng 3. Mặt cầu.....	10
Dạng 3. Xác định tâm, bán kính của mặt cầu.....	10
Dạng 3. Viết phương trình mặt cầu.....	13
Dạng 3. Một số bài toán khác.....	16
Dạng 4. Bài toán cực trị.....	17
PHẦN B. LỜI GIẢI THAM KHẢO.....	19
Dạng 1. Tìm tọa độ điểm, véc tơ liên quan đến hệ trục tọa độ OXYZ.....	19
Dạng 2. Tích vô hướng, tích có hướng và ứng dụng.....	27
Dạng 2.1 Tích vô hướng và ứng dụng.....	27
Dạng 2.2 Tích có hướng và ứng dụng.....	28
Dạng 3. Mặt cầu.....	31
Dạng 3. Xác định tâm, bán kính của mặt cầu.....	31
Dạng 3. Viết phương trình mặt cầu.....	34
Dạng 3. Một số bài toán khác.....	37
Dạng 4. Bài toán cực trị.....	42

PHẦN A. CÂU HỎI

Dạng 1. Tìm tọa độ điểm, véc tơ liên quan đến hệ trục tọa độ OXYZ

Câu 1. (Mã đề 102 BGD&ĐT NĂM 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;-2)$ và $B(2;2;1)$.

Vector $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

- A. $(-1;-1;-3)$ B. $(3;1;1)$ C. $(1;1;3)$ D. $(3;3;-1)$

Câu 2. (Mã đề 104 - BGD - 2019) Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3;1;-1)$ trên trục Oy có tọa độ là

- A. $(3;0;-1)$. B. $(0;1;0)$. C. $(3;0;0)$. D. $(0;0;-1)$.

Câu 3. (Mã đề 101 BGD&ĐT NĂM 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -4; 3)$ và $B(2; 2; 7)$.

Trung điểm của đoạn thẳng AB có tọa độ là

- A. $(4; -2; 10)$ B. $(1; 3; 2)$ C. $(2; 6; 4)$ D. $(2; -1; 5)$

Câu 4. (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(3; -4; 0)$, $B(-1; 1; 3)$, $C(3; 1; 0)$. Tìm tọa độ điểm D trên trục hoành sao cho $AD = BC$.

- A. $D(6; 0; 0)$, $D(12; 0; 0)$ B. $D(0; 0; 0)$, $D(6; 0; 0)$
C. $D(-2; 1; 0)$, $D(-4; 0; 0)$ D. $D(0; 0; 0)$, $D(-6; 0; 0)$

Câu 5. (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2018-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; -1)$

và $B(2; 3; 2)$. Vector $\overrightarrow{AB}$

có tọa độ là

- A. $(1; 2; 3)$ B. $(-1; -2; 3)$ C. $(3; 5; 1)$ D. $(3; 4; 1)$

Câu 6. (Mã 103 - BGD - 2019) Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; 1; -1)$ trên trục Oy có tọa độ là

- A. $(0; 0; -1)$. B. $(2; 0; -1)$. C. $(0; 1; 0)$. D. $(2; 0; 0)$.

Câu 7. (MÃ ĐỀ 110 BGD&ĐT NĂM 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2; 2; 1)$.

Tính độ dài đoạn thẳng OA .

- A. $OA = \sqrt{5}$ B. $OA = 5$ C. $OA = 3$ D. $OA = 9$

Câu 8. (Mã 102 - BGD - 2019) Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3; -1; 1)$ trên trục Oz có tọa độ là

- A. $(3; -1; 0)$. B. $(0; 0; 1)$. C. $(0; -1; 0)$. D. $(3; 0; 0)$.

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; -2; 3)$ và $B(-1; 2; 5)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB .

- A. $I(1; 0; 4)$. B. $I(2; 0; 8)$. C. $I(2; -2; -1)$. D. $I(-2; 2; 1)$.

Câu 10. (Mã đề 101 - BGD - 2019) Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; 1; -1)$ trên trục Oz có tọa độ là

- A. $(2; 0; 0)$. B. $(0; 1; 0)$. C. $(2; 1; 0)$. D. $(0; 0; -1)$.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 3; 1)$ và $B(5; 6; 2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M . Tính tỉ số $\frac{AM}{BM}$.

- A. $\frac{AM}{BM} = 3$ B. $\frac{AM}{BM} = 2$ C. $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{3}$ D. $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$

Câu 12. (ĐỀ THAM KHẢO BGD & ĐT 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3; -1; 1)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oyz) là điểm

- A. $M(3; 0; 0)$ B. $N(0; -1; 1)$ C. $P(0; -1; 0)$ D. $Q(0; 0; 1)$

Câu 13. (KSCL THPT NGUYỄN KHUYẾN LẦN 05 NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}(1;2;3)$; $\vec{b}(2;2;-1)$; $\vec{c}(4;0;-4)$. Tọa độ của vectơ $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ là

- A. $\vec{d}(-7;0;-4)$ B. $\vec{d}(-7;0;4)$ C. $\vec{d}(7;0;-4)$ D. $\vec{d}(7;0;4)$

Câu 14. (KSCL THPT NGUYỄN KHUYẾN LẦN 05 NĂM 2018-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a} = (2; -2; -4)$, $\vec{b} = (1; -1; 1)$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

- A. $\vec{a} + \vec{b} = (3; -3; -3)$ B. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương
C. $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ D. $\vec{a} \perp \vec{b}$

Câu 15. (THPT BA ĐÌNH NĂM 2018-2019 LẦN 02) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;-1)$, $B(2;3;2)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

- A. $(2;2;3)$. B. $(1;2;3)$. C. $(3;5;1)$. D. $(3;4;1)$.

Câu 16. (THPT CẨM GIÀNG 2 NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(3;-2;3)$ và $B(-1;2;5)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là:

- A. $I(-2;2;1)$. B. $I(1;0;4)$. C. $I(2;0;8)$. D. $I(2;-2;-1)$.

Câu 17. (THPT GIA LỘC HẢI DƯƠNG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Trong không gian $Oxyz$ cho $\vec{a} = (2;3;2)$ và $\vec{b} = (1;1;-1)$. Vectơ $\vec{a} - \vec{b}$ có tọa độ là

- A. $(3;4;1)$. B. $(-1;-2;3)$. C. $(3;5;1)$. D. $(1;2;3)$.

Câu 18. (TRƯỜNG THPT HOÀNG HOA THÁM HÙNG YÊN NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2;-3;3)$, $\vec{b} = (0;2;-1)$, $\vec{c} = (3;-1;5)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$.

- A. $(10;-2;13)$. B. $(-2;2;-7)$. C. $(-2;-2;7)$. D. $(-2;2;7)$.

Câu 19. (TRƯỜNG THPT HOÀNG HOA THÁM HÙNG YÊN NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;3;2)$, $B(3;-1;4)$. Tìm tọa độ trung điểm I của AB .

- A. $I(2;-4;2)$. B. $I(4;2;6)$. C. $I(-2;-1;-3)$. D. $I(2;1;3)$.

Câu 20. (THPT HÙNG VƯƠNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2018-2019 LẦN 01) Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ cho ba điểm $A(-1;2;-3)$, $B(1;0;2)$, $C(x;y;-2)$ thẳng hàng. Khi đó $x + y$ bằng

- A. $x + y = 1$. B. $x + y = 17$. C. $x + y = -\frac{11}{5}$. D. $x + y = \frac{11}{5}$.

Câu 21. (THPT HÙNG VƯƠNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2018-2019 LẦN 01) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Tọa độ của vectơ $\vec{a}$ là

- A. $(-1;2;-3)$. B. $(2;-3;-1)$. C. $(2;-1;-3)$. D. $(-3;2;-1)$.

Câu 22. (ĐỀ 15 LOVE BOOK NĂM 2018-2019) Trong không gian cho hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;3)$, $B(-1;2;5)$, $C(0;0;1)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

- A. $G(0;0;3)$. B. $G(0;0;9)$. C. $G(-1;0;3)$. D. $G(0;0;1)$.

Câu 23. (TT HOÀNG HOA THÁM - 2018-2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2;-3;3)$, $\vec{b} = (0;2;-1)$, $\vec{c} = (3;-1;5)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$.

- A. $(10; -2; 13)$. B. $(-2; 2; -7)$. C. $(-2; -2; 7)$. D. $(-2; 2; 7)$.

Câu 24. (TT HOÀNG HOA THẨM - 2018-2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $A(1; 3; 2)$, $B(3; -1; 4)$. Tìm tọa độ trung điểm I của AB .

- A. $I(2; -4; 2)$. B. $I(4; 2; 6)$. C. $I(-2; -1; 3)$. D. $I(2; 1; 3)$.

Câu 25. (LIÊN TRƯỜNG THPT TP VINH NGHỆ AN NĂM 2018-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 5; 2)$ và $B(3; -3; 2)$. Tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là

- A. $M(1; 1; 2)$ B. $M(2; 2; 4)$ C. $M(2; -4; 0)$ D. $M(4; -8; 0)$

Câu 26. (THPT MINH KHAI HÀ TĨNH NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\vec{x} = (2; 1; -3)$ và $\vec{y} = (1; 0; -1)$. Tìm tọa độ của vector $\vec{a} = \vec{x} + 2\vec{y}$.

- A. $\vec{a} = (4; 1; -1)$. B. $\vec{a} = (3; 1; -4)$. C. $\vec{a} = (0; 1; -1)$. D. $\vec{a} = (4; 1; -5)$.

Câu 27. (THPT ĐOÀN THƯỜNG - HẢI DƯƠNG - 2018 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -4; 3)$ và $B(2; 2; 7)$. Trung điểm của đoạn thẳng AB có tọa độ là

- A. $(1; 3; 2)$. B. $(2; -1; 5)$. C. $(2; -1; -5)$. D. $(2; 6; 4)$.

Câu 28. (THPT CÙ HUY CẬN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 0; 3)$, $B(2; 3; -4)$, $C(-3; 1; 2)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

- A. $D(-4; -2; 9)$. B. $D(-4; 2; 9)$. C. $D(4; -2; 9)$. D. $D(4; 2; -9)$.

Câu 29. (THPT CÙ HUY CẬN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1; 3; 4)$, $B(2; -1; 0)$, $C(3; 1; 2)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

- A. $G(2; 1; 2)$. B. $G(6; 3; 6)$. C. $G\left(3; \frac{2}{3}; 3\right)$. D. $G(2; -1; 2)$.

Câu 30. (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN ĐIỆN BIÊN NĂM 2018-2019 LẦN 02) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho tam giác ABC biết $A(5; -2; 0)$, $B(-2; 3; 0)$, $C(0; 2; 3)$. Trọng tâm G của tam giác ABC có tọa độ:

- A. $(1; 2; 1)$. B. $(2; 0; -1)$. C. $(1; 1; 1)$. D. $(1; 1; -2)$.

Câu 31. (THPT - YÊN ĐỊNH THANH HÓA 2018 2019- LẦN 2) Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2; -1; 0)$ và $B(1; 1; -3)$. Vector $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

- A. $(3; 0; -3)$. B. $(-1; 2; -3)$. C. $(-1; -2; 3)$. D. $(1; -2; 3)$.

Câu 32. (THPT - YÊN ĐỊNH THANH HÓA 2018 2019- LẦN 2) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 0; 0)$, $B(1; 1; 0)$, $C(0; 1; 1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ (theo thứ tự các đỉnh) là hình bình hành?

- A. $D(2; 0; 0)$. B. $D(1; 1; 1)$. C. $D(0; 0; 1)$. D. $D(0; 2; 1)$.

Câu 33. (SỞ GD&ĐT HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Trong không gian $Oxyz$ cho $A(2; -2; 1)$, $B(1; -1; 3)$. Tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB}$ là:

- A. $(-1; 1; 2)$. B. $(-3; 3; -4)$. C. $(3; -3; 4)$. D. $(1; -1; -2)$

Câu 34. (CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH ĐỒNG NAI NĂM 2018-2019 LẦN 01) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, điểm nào sau đây nằm trên mặt phẳng tọa độ (Oyz) ?

- A. $M(3;4;0)$. B. $P(-2;0;3)$. C. $Q(2;0;0)$. D. $N(0;4;-1)$.

Câu 35. (CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH ĐỒNG NAI NĂM 2018-2019 LẦN 01) Trong không gian $Oxyz$ với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz . Tính tọa độ của vectơ $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

- A. $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (-1; -1; 1)$. B. $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (-1; 1; 1)$. C. $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (1; 1; -1)$. D. $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (1; -1; 1)$.

Câu 36. (CHUYÊN HẠ LONG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $M(4;5;6)$. Hình chiếu của M xuống mặt phẳng (Oyz) là M' . Xác định tọa độ M' .

- A. $M'(4;5;0)$. B. $M'(4;0;6)$. C. $M'(4;0;0)$. D. $M'(0;5;6)$.

Câu 37. (CHUYÊN HẠ LONG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(x; y; z)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Nếu M' đối xứng với M qua mặt phẳng (Oxz) thì $M'(x; y; -z)$.
 B. Nếu M' đối xứng với M qua Oy thì $M'(x; y; -z)$.
 C. Nếu M' đối xứng với M qua mặt phẳng (Oxy) thì $M'(x; y; -z)$.
 D. Nếu M' đối xứng với M qua gốc tọa độ O thì $M'(2x; 2y; 0)$.

Câu 38. (THPT GANG THẾP THÁI NGUYÊN NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ giả sử $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, khi đó tọa độ véc tơ $\vec{u}$ là

- A. $(-2; 3; 1)$. B. $(2; 3; -1)$. C. $(2; -3; -1)$. D. $(2; 3; 1)$.

Câu 39. (THPT CHUYÊN SƠN LA NĂM 2018-2019 LẦN 01) Trong không gian $Oxyz$, cho 2 điểm $M(1; -2; 2)$ và $N(1; 0; 4)$. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng MN là:

- A. $(1; -1; 3)$. B. $(0; 2; 2)$. C. $(2; -2; 6)$. D. $(1; 0; 3)$.

Câu 40. (THPT LÊ QUÝ ĐÔN ĐÀ NẴNG NĂM 2018-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1; 2; 1)$ và $\vec{b} = (-1; 3; 0)$. Vector $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$ có tọa độ là

- A. $(1; 7; 2)$. B. $(1; 5; 2)$. C. $(3; 7; 2)$. D. $(1; 7; 3)$.

Câu 41. (KTNL GV BẮC GIANG NĂM 2018-2019) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(-3; 4)$ và $B(5; 6)$. Trung điểm của đoạn thẳng AB có tọa độ là

- A. $(1; 5)$. B. $(4; 1)$. C. $(5; 1)$. D. $(8; 2)$.

Câu 42. (KTNL GV BẮC GIANG NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (2; 1; -2)$ và vectơ $\vec{b} = (1; 0; 2)$. Tìm tọa độ vectơ $\vec{c}$ là tích có hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

- A. $\vec{c} = (2; 6; -1)$. B. $\vec{c} = (4; 6; -1)$. C. $\vec{c} = (4; -6; -1)$. D. $\vec{c} = (2; -6; -1)$.

Câu 43. (KTNL GV THUẬN THÀNH 2 BẮC NINH NĂM 2018-2019) Trong không gian với trục hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Tọa độ của vectơ $\vec{a}$ là:

- A. $\vec{a}(-1; 2; -3)$. B. $\vec{a}(2; -3; -1)$. C. $\vec{a}(-3; 2; -1)$. D. $\vec{a}(2; -1; -3)$.

Câu 44. (THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -4; 3)$ và $B(2; 2; 9)$. Trung điểm của đoạn AB có tọa độ là

- A. $(0; 3; 3)$. B. $(4; -2; 12)$. C. $(2; -1; 6)$. D. $\left(0; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

Câu 45. (SỞ GD&ĐT THANH HÓA NĂM 2018 - 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -3; 1)$, $B(3; 0; -2)$. Tính độ dài AB .

- A. 26. B. 22. C. $\sqrt{26}$. D. $\sqrt{22}$.

Câu 46. (LIÊN TRƯỜNG THPT TP VINH NGHỆ AN NĂM 2018-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 5; 2)$ và $B(3; -3; 2)$. Tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là

- A. $M(1; 1; 2)$ B. $M(2; 2; 4)$ C. $M(2; -4; 0)$ D. $M(4; -8; 0)$

Câu 47. (ĐỀ HỌC SINH GIỎI TỈNH BẮC NINH NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (2; m-1; 3)$, $\vec{b} = (1; 3; -2n)$. Tìm m, n để các vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.

- A. $m=7; n=-\frac{3}{4}$. B. $m=4; n=-3$. C. $m=1; n=0$. D. $m=7; n=-\frac{4}{3}$.

Câu 48. (THPT NGHĨA HUNG NĐ- GK2 - 2018 - 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(-1; 5; 3)$ và $M(2; 1; -2)$. Tọa độ điểm B biết M là trung điểm của AB là

- A. $B\left(\frac{1}{2}; 3; \frac{1}{2}\right)$. B. $B(-4; 9; 8)$.
C. $B(5; 3; -7)$. D. $B(5; -3; -7)$.

Câu 49. (KSCL THPT NGUYỄN KHUYẾN LẦN 05 NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$ và $C(-3; 5; 1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

- A. $D(-2; 8; -3)$ B. $D(-4; 8; -5)$ C. $D(-2; 2; 5)$ D. $D(-4; 8; -3)$

Câu 50. (KSCL THPT NGUYỄN KHUYẾN LẦN 05 NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $B(1; 2; -3)$, $C(7; 4; -2)$. Nếu điểm E thỏa mãn đẳng thức $\vec{CE} = 2\vec{EB}$ thì tọa độ điểm E là:

- A. $\left(3; \frac{8}{3}; -\frac{8}{3}\right)$ B. $\left(\frac{8}{3}; 3; -\frac{8}{3}\right)$. C. $\left(3; 3; -\frac{8}{3}\right)$ D. $\left(1; 2; \frac{1}{3}\right)$

Câu 51. (KSCL THPT NGUYỄN KHUYẾN LẦN 05 NĂM 2018-2019) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxyz$, Tam giác ABC với $A(1; -3; 3)$; $B(2; -4; 5)$, $C(a; -2; b)$ nhận điểm $G(1; c; 3)$ làm trọng tâm của nó thì giá trị của tổng $a+b+c$ bằng.

- A. -5 B. 3 C. 1 D. -2

Câu 52. (KSCL THPT NGUYỄN KHUYẾN LẦN 05 NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; -1; 5)$, $B(5; -5; 7)$, $M(x; y; 1)$. Với giá trị nào của x, y thì A, B, M thẳng hàng.

- A. $x=4; y=7$ B. $x=-4; y=-7$ C. $x=4; y=-7$ D. $x=-4; y=7$

Câu 53. (KTNL GIA BÌNH NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1; 2; -3)$, $B(2; 5; 7)$, $C(-3; 1; 4)$. Điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành là

- A. $D(6;6;0)$ B. $D\left(0;\frac{8}{3};\frac{8}{3}\right)$ C. $D(0;8;8)$ D. $D(-4;-2;-6)$

Câu 54. (THCS - THPT NGUYỄN KHUYẾN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Trong không gian $Oxyz$, tọa độ điểm đối xứng của $M(1;2;3)$ qua mặt phẳng (Oyz) là

- A. $(0;2;3)$. B. $(-1;-2;-3)$. C. $(-1;2;3)$. D. $(1;2;-3)$.

Câu 55. (THPT LƯƠNG THẾ VINH HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 1) Cho tam giác ABC có $A(1;-2;0)$, $B(2;1;-2)$, $C(0;3;4)$. Tìm tọa độ điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

- A. $(1;0;-6)$. B. $(1;6;2)$. C. $(-1;0;6)$. D. $(1;6;-2)$.

Câu 56. (LIÊN TRƯỜNG THPT TP VINH NGHỆ AN NĂM 2018-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;-2)$, $B(2;-3;5)$. Điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MA = 2MB$, tọa độ điểm M là

- A. $\left(\frac{7}{3};-\frac{5}{3};\frac{8}{3}\right)$. B. $(4;5;-9)$. C. $\left(\frac{3}{2};-5;\frac{17}{2}\right)$. D. $(1;-7;12)$.

Câu 57. (THPT MINH KHAI HÀ TĨNH NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;-2)$ và $B(3;-1;1)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$.

- A. $M(9;-5;7)$. B. $M(9;5;7)$.
C. $M(-9;5;-7)$. D. $M(9;-5;-5)$.

Câu 58. (THPT QUỲNH LƯU 3 NGHỆ AN NĂM 2018-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;1)$, $B(0;1;2)$. Tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho ba điểm A , B , M thẳng hàng là

- A. $M(4;-5;0)$. B. $M(2;-3;0)$. C. $M(0;0;1)$. D. $M(4;5;0)$.

Câu 59. (THPT YÊN KHÁNH - NINH BÌNH - 2018 - 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho các véc tơ $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = (m;2;m+1)$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị của m để $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 60. (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1)$, $\overrightarrow{AB} = (1;3;1)$ thì tọa độ của điểm B là:

- A. $B(2;5;0)$. B. $B(0;-1;-2)$. C. $B(0;1;2)$. D. $B(-2;-5;0)$

Câu 61. (CHUYÊN ĐHSP HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 01) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$; $D(0;2a;0)$, $A'(0;0;2a)$ với $a \neq 0$. Độ dài đoạn thẳng AC' là

- A. $|a|$. B. $2|a|$. C. $3|a|$. D. $\frac{3}{2}|a|$.

Câu 62. (CHUYÊN KHTN LẦN 2 NĂM 2018-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-3;1;2)$, tọa độ điểm A' đối xứng với điểm A qua trục Oy là

- A. $(3;-1;-2)$. B. $(3;-1;2)$. C. $(3;1;-2)$. D. $(-3;-1;2)$.

Câu 63. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;1;0)$, $B(0;-1;0)$, $C(0;0;-6)$. Nếu tam giác $A'B'C'$ có các đỉnh thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{C'C} = \vec{0}$ thì tam giác $A'B'C'$ có tọa độ trọng tâm là

- A. $(3; -2; 0)$. B. $(2; -3; 0)$. C. $(1; 0; -2)$. D. $(3; -2; 1)$.

Câu 64. (ĐỀ THI CÔNG BẰNG KHTN LẦN 02 NĂM 2018-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A = (1; 0; 1)$, $B = (2; 1; 2)$ và $D = (1; -1; 1)$. Tọa độ điểm C là

- A. $(2; 0; 2)$. B. $(2; 2; 2)$. C. $(2; -2; 2)$. D. $(0; -2; 0)$.

Câu 65. (SỞ GD&ĐT PHÚ THỌ NĂM 2018-2019 LẦN 01) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -2)$ và $B\left(\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$. Biết $I(a; b; c)$ là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác OAB . Giá trị $a - b + c$ bằng

- A. 1 B. 3 C. 2 D. 0

Câu 66. (CHUYÊN ĐHSP HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 01) Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho $A(2; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 2)$. Có tất cả bao nhiêu điểm M trong không gian thỏa mãn M không trùng với các điểm A, B, C và $\widehat{AMB} = \widehat{BMC} = \widehat{CMA} = 90^\circ$?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Dạng 2. Tích vô hướng, tích có hướng và ứng dụng

Dạng 2.1 Tích vô hướng và ứng dụng

Câu 67. (MĐ 105 BGD&ĐT NĂM 2017) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (2; 1; 0)$ và $\vec{b} = (-1; 0; -2)$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

- A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{2}{25}$ B. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{2}{5}$ C. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{25}$ D. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{5}$

Câu 68. (MĐ 104 BGD&ĐT NĂM 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $M(2; 3; -1)$, $N(-1; 1; 1)$ và $P(1; m-1; 2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N .

- A. $m = 2$ B. $m = -6$ C. $m = 0$ D. $m = -4$

Câu 69. (THPT LÊ VĂN THỊNH BẮC NINH NĂM 2018-2019) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC biết $A(1; 3)$, $B(-2; -2)$, $C(3; 1)$. Tính cosin góc A của tam giác.

- A. $\cos A = \frac{2}{\sqrt{17}}$ B. $\cos A = \frac{1}{\sqrt{17}}$ C. $\cos A = -\frac{2}{\sqrt{17}}$ D. $\cos A = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

Câu 70. (THPT QUỲNH LƯU 3 NGHỆ AN NĂM 2018-2019) Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai vector $\vec{i}$ và $\vec{u} = (-\sqrt{3}; 0; 1)$ là

- A. 120° . B. 60° . C. 150° . D. 30° .

Câu 71. (THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (-3; 4; 0)$, $\vec{b} = (5; 0; 12)$. Côsin của góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

- A. $\frac{3}{13}$. B. $\frac{5}{6}$. C. $-\frac{5}{6}$. D. $-\frac{3}{13}$.

Câu 72. (CHUYÊN ĐHSP HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 01) Trong không gian tọa độ $Oxyz$ góc giữa hai vector $\vec{i}$ và $\vec{u} = (-\sqrt{3}; 0; 1)$ là

- A. 120° . B. 30° . C. 60° . D. 150° .

Câu 73. (CHUYÊN NGUYỄN TẤT THÀNH YÊN BÀI LẦN 01 NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vector $\vec{u} = (3; 0; 1)$ và $\vec{v} = (2; 1; 0)$. Tính tích vô hướng $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

- A. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8$. B. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6$. C. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. D. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6$.

Câu 74. (CHUYÊN HƯNG YÊN NĂM 2018-2019 LẦN 03) Trong không gian tọa độ $Oxyz$, góc giữa hai vector $\vec{i}$ và $\vec{u} = (-\sqrt{3}; 0; 1)$ là

- A. 30° . B. 120° . C. 60° . D. 150° .

Câu 75. (CHUYÊN TRẦN PHÚ HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; -2; 3)$, $B(0; 3; 1)$, $C(4; 2; 2)$. Cosin của góc $\widehat{BAC}$ là

- A. $\frac{9}{\sqrt{35}}$. B. $-\frac{9}{\sqrt{35}}$. C. $-\frac{9}{2\sqrt{35}}$. D. $\frac{9}{2\sqrt{35}}$.

Câu 76. (THPT YÊN KHÁNH - NINH BÌNH - 2018 - 2019) Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(5; 1; 5)$; $B(4; 3; 2)$; $C(-3; -2; 1)$. Điểm $I(a; b; c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tính $a + 2b + c$?

- A. 1. B. 3. C. 6. D. -9.

Câu 77. (THPT NGÔ SĨ LIÊN BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1; 0; 0)$, $B(0; 0; 1)$, $C(2; 1; 1)$. Diện tích của tam giác ABC bằng:

- A. $\frac{\sqrt{11}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

Câu 78. (ĐỀ HỌC SINH GIỎI TỈNH BẮC NINH NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho véc tơ $\vec{u} = (1; 1; -2)$, $\vec{v} = (1; 0; m)$. Tìm tất cả giá trị của m để góc giữa $\vec{u}$, $\vec{v}$ bằng 45° .

- A. $m = 2$. B. $m = 2 \pm \sqrt{6}$. C. $m = 2 - \sqrt{6}$. D. $m = 2 + \sqrt{6}$.

Dạng 2.2 Tích có hướng và ứng dụng

Câu 79. (ĐỀ GK2 VIỆT ĐỨC HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ biết $A(3; -2; m)$, $B(2; 0; 0)$, $C(0; 4; 0)$, $D(0; 0; 3)$. Tìm giá trị dương của tham số m để thể tích tứ diện bằng 8.

- A. $m = 8$. B. $m = 4$. C. $m = 12$. D. $m = 6$.

Câu 80. (ĐỀ GK2 VIỆT ĐỨC HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1; -2; 0)$, $B(2; 0; 3)$, $C(-2; 1; 3)$ và $D(0; 1; 1)$. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng:

- A. 6. B. 8. C. 12. D. 4.

Câu 81. (KSCL THPT NGUYỄN KHUYẾN LẦN 05 NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{u} = (1; 1; 2)$, $\vec{v} = (-1; m; m-2)$. Khi $[\vec{u}, \vec{v}] = \sqrt{14}$ thì

- A. $m = 1$ hoặc $m = -\frac{11}{5}$ B. $m = -1$ hoặc $m = -\frac{11}{3}$
C. $m = 1$ hoặc $m = -3$ D. $m = -1$

Câu 82. (KSCL THPT NGUYỄN KHUYẾN LẦN 05 NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(2; -1; 1)$, $B(3; 0; -1)$, $C(2; -1; 3)$, $D \in Oy$ và có thể tích bằng 5. Tính tổng tung độ của các điểm D .

- A. -6 B. 2 C. 7 D. -4

Câu 83. (HỌC MÃI NĂM 2018-2019-LẦN 02) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1; -2; 3)$ và $\vec{b} = (1; 1; -1)$. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $|\vec{a} + \vec{b}| = 3$. B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -4$. C. $|\vec{a} - \vec{b}| = 5$. D. $[\vec{a}, \vec{b}] = (-1; -4; 3)$.

Câu 84. (TOÁN HỌC TUỔI TRẺ NĂM 2018 - 2019 LẦN 01) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; -2; 0)$, $B(1; 0; -1)$, $C(0; -1; 2)$, $D(-2; m; n)$. Trong các hệ thức liên hệ giữa m và n dưới đây, hệ thức nào để bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng?

- A. $2m + n = 13$. B. $2m - n = 13$. C. $m + 2n = 13$. D. $2m - 3n = 10$.

Câu 85. (CHUYÊN TRẦN PHÚ HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 0; -1)$, $B(1; -1; 2)$. Diện tích tam giác OAB bằng

- A. $\sqrt{11}$. B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{11}}{2}$. D. $\sqrt{6}$.

Câu 86. Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc tơ $\vec{m} = (4; 3; 1)$ và $\vec{n} = (0; 0; 1)$. Gọi $\vec{p}$ là véc tơ cùng hướng với $[\vec{m}, \vec{n}]$ và $|\vec{p}| = 15$. Tọa độ của véc tơ $\vec{p}$ là

- A. $(9; -12; 0)$. B. $(0; 9; -12)$. C. $(-9; 12; 0)$. D. $(0; 9; -12)$.

Câu 87. (ĐỀ THI GIỮA KỲ II YÊN PHONG 1 - 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2; 0; 2)$, $B(1; -1; -2)$, $C(-1; 1; 0)$, $D(-2; 1; 2)$. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ bằng

- A. $\frac{42}{3}$. B. $\frac{14}{3}$. C. $\frac{21}{3}$. D. $\frac{7}{3}$.

Câu 88. (ĐỀ GK2 VIỆT ĐỨC HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0; -2; 1)$, $B(1; 0; -2)$, $C(3; 1; -2)$, $D(-2; -2; -1)$. Câu nào sau đây sai?

- A. Bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. B. Tam giác ACD là tam giác vuông tại A .
C. Góc giữa hai vectơ $\vec{AB}$ và $\vec{CD}$ là góc tù. D. Tam giác ABD là tam giác cân tại B .

Câu 89. (THPT LƯƠNG THẾ VINH - HN - LẦN 1 - 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2; 3; 1)$, $B(2; 1; 0)$, $C(-3; -1; 1)$. Tìm tất cả các điểm D sao cho $ABCD$ là hình thang có đáy AD và $S_{ABCD} = 3S_{ABC}$.

- A. $D(8; 7; -1)$. B. $\begin{bmatrix} D(-8; -7; 1) \\ D(12; 1; -3) \end{bmatrix}$. C. $\begin{bmatrix} D(8; 7; -1) \\ D(-12; -1; 3) \end{bmatrix}$. D. $D(-12; -1; 3)$.

Dạng 3. Mặt cầu

Dạng 3. Xác định tâm, bán kính của mặt cầu

Câu 90. (MĐ 104 BGD&ĐT NĂM 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 8$. Tính bán kính R của (S) .

- A. $R = 2\sqrt{2}$ B. $R = 64$ C. $R = 8$ D. $R = 4$

Câu 91. (Mã đề 104 BGD&ĐT NĂM 2018) Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): (x-5)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 3$ có bán kính bằng

- A. 9 B. $2\sqrt{3}$ C. 3 D. $\sqrt{3}$

- Câu 92. (MÃ ĐỀ 110 BGD&ĐT NĂM 2017)** Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + m = 0$ là phương trình của một mặt cầu.
- A. $m < 6$ B. $m \geq 6$ C. $m \leq 6$ D. $m > 6$
- Câu 93. (MĐ 105 BGD&ĐT NĂM 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-5)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$. Tính bán kính R của (S) .
- A. $R = 6$ B. $R = 3$ C. $R = 18$ D. $R = 9$
- Câu 94. (MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2017-2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 2$. Tâm của (S) có tọa độ là
- A. $(3; -1; 1)$ B. $(-3; -1; 1)$ C. $(-3; 1; -1)$ D. $(3; 1; -1)$
- Câu 95. (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2017)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 20$.
- A. $I(-1; 2; -4), R = 2\sqrt{5}$ B. $I(1; -2; 4), R = 20$
 C. $I(1; -2; 4), R = 2\sqrt{5}$ D. $I(-1; 2; -4), R = 5\sqrt{2}$
- Câu 96. (Mã đề 101 - BGD - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 7 = 0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng
- A. 3. B. $\sqrt{15}$. C. $\sqrt{7}$. D. 9.
- Câu 97. (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2018-2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $I(1; 1; 1)$ và $A(1; 2; 3)$. Phương trình mặt cầu có tâm I và đi qua A là
- A. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 5$ B. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 29$
 C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$ D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 25$
- Câu 98. (Mã đề 104 - BGD - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2z - 7 = 0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng
- A. $\sqrt{15}$. B. $\sqrt{7}$. C. 9. D. 3.
- Câu 99. (Mã 102 - BGD - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 7 = 0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng
- A. $\sqrt{7}$. B. 9. C. $\sqrt{15}$. D. 3.
- Câu 100. (Mã 103 - BGD - 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 2z - 7 = 0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng
- A. $\sqrt{7}$. B. 3. C. 9. D. $\sqrt{15}$.
- Câu 101. (TRƯỜNG THPT HOÀNG HOA THÁM HƯNG YÊN NĂM 2018-2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 1 = 0$. Tìm tọa độ tâm và bán kính của mặt cầu (S) .
- A. $I(-4; 1; 0), R = 2$. B. $I(-4; 1; 0), R = 4$.
 C. $I(4; -1; 0), R = 2$. D. $I(4; -1; 0), R = 4$.

Câu 102. (THPT LƯƠNG THẾ VINH HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 1) Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$. Tính bán kính R của mặt cầu (S) .

- A. $R = \sqrt{3}$. B. $R = 3$. C. $R = 9$. D. $R = 3\sqrt{3}$.

Câu 103. (TT HOÀNG HOA THÁM - 2018-2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 1 = 0$. Tìm tọa độ tâm và bán kính mặt cầu (S) :

- A. $I(-4; 1; 0), R = 2$. B. $I(-4; 1; 0), R = 4$. C. $I(4; -1; 0), R = 2$. D. $I(4; -1; 0), R = 4$.

Câu 104. (THPT ĐOÀN THƯỢNG - HẢI DƯƠNG - 2018 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 2$. Xác định tọa độ tâm của mặt cầu (S)

- A. $I(-3; 1; -1)$. B. $I(3; 1; -1)$. C. $I(-3; -1; 1)$. D. $I(3; -1; 1)$.

Câu 105. (SỞ GD&ĐT HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z - 3 = 0$. Tọa độ tâm I của mặt cầu (S) là:

- A. $(-1; 2; 1)$. B. $(2; -4; -2)$. C. $(1; -2; -1)$. D. $(-2; 4; 2)$.

Câu 106. (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG TRỊ NĂM 2018-2019 LẦN 01) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 10y - 6z + 49 = 0$. Tính bán kính R của mặt cầu (S) .

- A. $R = 1$. B. $R = 7$. C. $R = \sqrt{151}$. D. $R = \sqrt{99}$.

Câu 107. (ĐỀ 04 VTED NĂM 2018-2019) Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z + 1 = 0$ có tâm là

- A. $(-4; 2; -6)$ B. $(2; -1; 3)$ C. $(-2; 1; -3)$ D. $(4; -2; 6)$

Câu 108. (THPT GANG THẾP THÁI NGUYÊN NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 4$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu đó.

- A. $I(-1; 2; -3); R = 2$. B. $I(-1; 2; -3); R = 4$.
C. $I(1; -2; 3); R = 2$. D. $I(1; -2; 3); R = 4$.

Câu 109. (KTNL GV BẮC GIANG NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 4 = 0$. Tính bán kính R của (S) .

- A. 1. B. 9. C. 2. D. 3.

Câu 110. (THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 4$. Tâm của (S) có tọa độ là

- A. $(-3; 1; -1)$. B. $(3; -1; 1)$. C. $(3; -1; -1)$. D. $(3; 1; -1)$.

Câu 111. (SỞ GD&ĐT PHÚ THỌ NĂM 2018-2019 LẦN 01) Trong không gian $Oxyz$, có tất cả bao nhiêu giá nguyên của m để

$x^2 + y^2 + z^2 + 2(m+2)x - 2(m-1)z + 3m^2 - 5 = 0$ là phương trình một mặt cầu?

- A. 4 B. 6 C. 5 D. 7

Câu 112. (ĐỀ 15 LOVE BOOK NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2(m+2)x + 4my + 19m - 6 = 0$ là phương trình mặt cầu.

- A. $1 < m < 2$. B. $m < 1$ hoặc $m > 2$. C. $-2 \leq m \leq 1$. D. $m < -2$ hoặc $m > 1$.

Câu 113. (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN ĐIỆN BIÊN LẦN 3 NĂM 2018-2019) Trong không gian $Oxyz$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4mx + 2my - 2mz + 9m^2 - 28 = 0 \text{ là phương trình mặt cầu?}$$

- A. 7. B. 8. C. 9. D. 6.

Câu 114. Trong không gian $Oxyz$, xét mặt cầu (S) có phương trình dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2az + 10a = 0$. Tập hợp các giá trị thực của a để (S) có chu vi đường tròn lớn bằng 8π là

- A. $\{1; 10\}$. B. $\{2; -10\}$. C. $\{-1; 11\}$. D. $\{1; -11\}$.

Câu 115. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 3) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-1; 0; 0)$, $B(0; 0; 2)$, $C(0; -3; 0)$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ là

- A. $\frac{\sqrt{14}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{14}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{14}}{2}$ D. $\sqrt{14}$

Câu 116. (THPT LƯƠNG THẾ VINH HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 1) Gọi (S) là mặt cầu đi qua 4 điểm $A(2; 0; 0)$, $B(1; 3; 0)$, $C(-1; 0; 3)$, $D(1; 2; 3)$. Tính bán kính R của (S) .

- A. $R = 2\sqrt{2}$. B. $R = 3$. C. $R = 6$. D. $R = \sqrt{6}$.

Lời giải

Câu 117. (SỞ GD&ĐT HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Cho hai điểm A, B cố định trong không gian có độ dài AB là 4. Biết rằng tập hợp các điểm M trong không gian sao cho $MA = 3MB$ là một mặt cầu. Bán kính mặt cầu đó bằng

- A. 3. B. $\frac{9}{2}$. C. 1. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 118. (SỞ GD&ĐT BÌNH PHƯỚC - LẦN 1 - 2018) Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2(m+2)x + 4my - 2mz + 5m^2 + 9 = 0$. Tìm các giá trị của m để phương trình trên là phương trình của một mặt cầu.

- A. $m < -5$ hoặc $m > 1$. B. $-5 < m < 1$. C. $m < -5$. D. $m > 1$.

Câu 119. (ĐỀ THI GIỮA KỲ II YÊN PHONG 1 - 2018) Trong không gian $Oxyz$. Cho tứ diện đều $ABCD$ có $A(0; 1; 2)$ và hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (BCD) là $H(4; -3; -2)$. Tìm tọa độ tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

- A. $I(3; -2; -1)$. B. $I(2; -1; 0)$. C. $I(3; -2; 1)$. D. $I(-3; -2; 1)$.

Dạng 3. Viết phương trình mặt cầu

Câu 120. (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2018-2019) Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $I(1; 1; 1)$ và $A(1; 2; 3)$. Phương trình mặt cầu có tâm I và đi qua A là

- A. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 5$ B. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 29$
C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$ D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 25$

Câu 121. (MÃ ĐỀ 123 BGD&ĐT NĂM 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; -2; 3)$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox . Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu tâm I bán kính IM ?

A. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 13$

B. $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 17$

C. $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 13$

D. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{13}$

Câu 122. (THPT CÙ HUY CẬN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -2; 7), B(-3; 8; -1)$. Mặt cầu đường kính AB có phương trình là

A. $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = \sqrt{45}$.

B. $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = 45$.

C. $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2 = \sqrt{45}$.

D. $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 45$.

Câu 123. (THPT - YÊN ĐỊNH THANH HÓA 2018 2019- LẦN 2) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu có tâm $I(1; -4; 3)$ và đi qua điểm $A(5; -3; 2)$.

A. $(x-1)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = 18$.

B. $(x-1)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = 16$.

C. $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z-3)^2 = 16$.

D. $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z-3)^2 = 18$.

Câu 124. (THPT CHUYÊN SƠN LA NĂM 2018-2019 LẦN 01) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; 1)$ và $B(1; -1; 3)$. Phương trình mặt cầu có đường kính AB là

A. $(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 8$.

B. $(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 2$.

C. $(x+1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 2$.

D. $(x+1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 8$.

Câu 125. (SỞ GD&ĐT THANH HÓA NĂM 2018 - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 4; 1), B(-2; 2; -3)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A. $x^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 36$.

B. $x^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 9$.

C. $x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 9$.

D. $x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 36$.

Câu 126. (CHUYÊN BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hỏi trong các phương trình sau phương trình nào là phương trình của mặt cầu?

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z - 1 = 0$

B. $x^2 + z^2 + 3x - 2y + 4z - 1 = 0$

C. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 4y + 4z - 1 = 0$

D. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z + 8 = 0$

Câu 19 : Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -1; -3)$; $B(0; 3; -1)$. Phương trình của mặt cầu đường kính AB là :

A. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 6$

B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 24$

C. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 24$

D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 6$

Câu 127. (CHUYÊN KHTN LẦN 2 NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ phương trình nào sau đây không phải là phương trình của một mặt cầu?

A. $x^2 + y^2 + z^2 + x - 2y + 4z - 3 = 0$.

B. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - x - y - z = 0$.

C. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x + 8y + 6z + 3 = 0$.

D. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z + 10 = 0$.

Câu 128. (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU NGHỆ AN LẦN 1 NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 3), B(5; 4; -1)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A. $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 36$.

B. $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 9$.

C. $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 6$.

D. $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+1)^2 = 9$.

Câu 129. (ĐỀ GK2 VIỆT ĐỨC HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt cầu tâm $I(2;1;-2)$ bán kính $R=2$ là:

- A. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 2^2$.
 B. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 4z + 5 = 0$.
 C. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 4z + 5 = 0$.
 D. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 2$.

Câu 130. (ĐỀ GK2 VIỆT ĐỨC HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu (S) tâm $A(2;1;0)$, đi qua điểm $B(0;1;2)$?

- A. $(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 8$.
 B. $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 8$.
 C. $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 64$.
 D. $(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 64$.

Câu 131. (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2018-2019) Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $I(1;1;1)$ và $A(1;2;3)$. Phương trình mặt cầu có tâm I và đi qua A là

- A. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 29$
 B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$
 C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 25$
 D. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 5$

Câu 132. (THPT ĐOÀN THƯỜNG - HẢI DƯƠNG - 2018 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$. Viết phương trình mặt cầu tâm I , cắt trục Ox tại hai điểm A và B sao cho $AB = 2\sqrt{3}$

- A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$.
 B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 20$.
 C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$.
 D. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$.

Câu 133. (THPT ĐOÀN THƯỜNG - HẢI DƯƠNG - 2018 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;3)$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox . Phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu tâm I bán kính IM ?

- A. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{13}$.
 B. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 13$.
 C. $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 13$.
 D. $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 17$.

Câu 134. (SỞ GD&ĐT BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, trong các mặt cầu dưới đây, mặt cầu nào có bán kính $R=2$?

- A. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z - 3 = 0$.
 B. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z - 10 = 0$.
 C. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z + 2 = 0$.
 D. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z + 5 = 0$.

Câu 135. (THPT GANG THẾP THÁI NGUYÊN NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;2), B(3;2;-3)$. Mặt cầu (S) có tâm I thuộc Ox và đi qua hai điểm A, B có phương trình.

- A. $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2 = 0$.
 B. $x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 2 = 0$.
 C. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2 = 0$.
 D. $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 2 = 0$.

Câu 136. (ĐỀ THI THỬ VTED 02 NĂM HỌC 2018 - 2019) Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có tâm $I(1;1;1)$ và diện tích bằng 4π có phương trình là

- A. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4$
 B. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 1$
 C. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 4$
 D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$

Câu 137. (ĐỀ GK2 VIỆT ĐỨC HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) qua bốn điểm $A(3;3;0)$, $B(3;0;3)$, $C(0;3;3)$, $D(3;3;3)$. Phương trình mặt cầu (S) là

- A. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(z-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.
 B. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(z-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$.
 C. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(z+\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$.
 D. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(z-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$.

Câu 138. (THPT CHUYÊN NGUYỄN ĐÌNH TRIỀU - ĐỒNG THÁP - LẦN 1 - 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$. Một mặt cầu (S') có tâm $I'(9;1;6)$ và tiếp xúc ngoài với mặt cầu (S) . Phương trình mặt cầu (S') là

- A. $(x-9)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 64$.
 B. $(x-9)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 144$.
 C. $(x-9)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 36$.
 D. $(x+9)^2 + (y+1)^2 + (z+6)^2 = 25$.

Câu 139. (THPT HAI BÀ TRƯNG - HUẾ - 2018) Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu đi qua điểm $A(1;-1;4)$ và tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ.

- A. $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = 16$.
 B. $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2 = 9$.
 C. $(x+3)^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2 = 36$.
 D. $(x+3)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 49$.

Câu 140. [KIM LIÊN - HÀ NỘI - LẦN 1 - 2018] Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(2;2;1)$, $N\left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$. Viết phương trình mặt cầu có tâm là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác OMN và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz) .

- A. $x^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 1$.
 B. $x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$.
 C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$.
 D. $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$.

Câu 141. (CHUYÊN HÀ TĨNH - LẦN 1 - 2018) Trong không gian $Oxyz$, gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu đi qua điểm $A(1;-1;4)$ và tiếp xúc với tất cả các mặt phẳng tọa độ. Tính $P = a - b + c$.

- A. $P = 6$.
 B. $P = 0$.
 C. $P = 3$.
 D. $P = 9$.

Dạng 3. Một số bài toán khác

Câu 142. (Mã 102 - BGD - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z - \sqrt{2})^2 = 3$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a;b;c)$ (a, b, c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

- A. 8.
 B. 16.
 C. 12.
 D. 4.

Câu 143. (Mã đề 104 - BGD - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 5$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a, b, c)$ (a, b, c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

A. 20

B. 8

C. 12

D. 16

Câu 144. (Mã 103 - BGD - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu: $(S): x^2 + y^2 + (z+1)^2 = 5$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a; b; c)$ (a, b, c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc nhau?

A. 20.

B. 8.

C. 12.

D. 16.

Câu 145. (MÃ ĐỀ 123 BGD&DT NĂM 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 9$, điểm $M(1; 1; 2)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 4 = 0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua M , thuộc (P) và cắt (S) tại 2 điểm A, B sao cho AB nhỏ nhất. Biết rằng Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}(1; a; b)$, tính $T = a - b$.

A. $T = -2$ B. $T = 1$ C. $T = 0$ D. $T = -1$

Câu 146. (TOÁN HỌC TUỔI TRẺ NĂM 2018 - 2019 LẦN 01) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(9, -3, 4)$, $B(a, b, c)$. Gọi M, N, P lần lượt là giao của đường thẳng AB với mặt phẳng Oxy, Oxz, Oyz . Biết các điểm M, N, P đều nằm trên đoạn AB sao cho $AM = MN = NP = PB$. Tính giá trị $ab + bc + ac$ bằng

A. -17 .B. 17 .C. -9 .D. 12 .

Câu 147. (THPT CHUYÊN NGŨ - HÀ NỘI - 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$ và một điểm $M(2; 3; 1)$. Từ M kẻ được vô số các tiếp tuyến tới (S) , biết tập hợp các tiếp điểm là đường tròn (C) . Tính bán kính r của đường tròn (C) .

A. $r = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.B. $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$.C. $r = \frac{\sqrt{2}}{3}$.D. (2) .

Câu 148. (THPT MỘ ĐỨC - QUẢNG NGÃI - 2018) Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0; -1; 2)$, $B(2; -3; 0)$, $C(-2; 1; 1)$, $D(0; -1; 3)$. Gọi (L) là tập hợp tất cả các điểm M trong không gian thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = 1$. Biết rằng (L) là một đường tròn, đường tròn đó có bán kính r bằng bao nhiêu?

A. $r = \frac{\sqrt{11}}{2}$.B. $r = \frac{\sqrt{7}}{2}$.C. $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$.D. $r = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Câu 149. (THPT CHUYÊN HẠ LONG - LẦN 2 - 2018) Trong không gian, cho bốn mặt cầu có bán kính lần lượt là $2, 3, 3, 2$ (đơn vị độ dài) tiếp xúc ngoài với nhau. Mặt cầu nhỏ nhất tiếp xúc ngoài với cả bốn mặt cầu nói trên có bán kính bằng

A. $\frac{5}{9}$.B. $\frac{3}{7}$.C. $\frac{7}{15}$.D. $\frac{6}{11}$.

Dạng 4. Bài toán cực trị

Câu 150. (KSCL THPT NGUYỄN KHUYẾN LẦN 05 NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho các điểm $A(-1; 2; 3)$, $B(6; -5; 8)$ và $\overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{k}$ trong đó a, b là các số thực luôn thay đổi. Nếu $|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị $a - b$ bằng

A. -25

B. -13

C. 0

D. 26

Câu 151. (SỞ GD&ĐT HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1)$; $B(2;-1;3)$ và điểm $M(a;b;0)$ sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất. Giá trị của $a+b$ là

A. 2.

B. -2.

C. 3.

D. 1.

Câu 152. (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU NGHỆ AN NĂM 2018-2019 LẦN 02) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$ và hai điểm $A(4;3;1)$, $B(3;1;3)$; M là điểm thay đổi trên (S) . Gọi m, n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2MA^2 - MB^2$. Xác định $(m-n)$.

A. 64.

B. 68.

C. 60.

D. 48.

Câu 153. (THPT GANG THẾP THÁI NGUYÊN NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2;4;-1)$, $B(1;4;-1)$, $C(2;4;3)$, $D(2;2;-1)$, biết $M(x;y;z)$ để $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $x+y+z$ bằng

A. 6.

B. $\frac{21}{4}$.

C. 8.

D. 9.

Câu 154. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1)$, $B(2;-1;3)$, $C(3;1;-5)$. Tìm điểm M trên mặt phẳng (Oyz) sao cho $MA^2 - 2MB^2 - MC^2$ lớn nhất.

A. $M\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$.B. $M\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; 0\right)$.C. $M(0;0;5)$.D. $M(3;-4;0)$.

Câu 155. (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU NĂM 2018-2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$ và hai điểm $A(4;3;1)$, $B(3;1;3)$; M là điểm thay đổi trên (S) . Gọi m, n là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2MA^2 - MB^2$. Xác định $(m-n)$.

A. 64.

B. 68.

C. 60.

D. 48.

Câu 156. (THPT NGHĨA HÙNG NGHỆ AN - GK2 - 2018 - 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(2;1;3)$, $B(1;-1;2)$, $C(3;-6;1)$. Điểm $M(x;y;z)$ thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $P = x + y + z$.

A. $P = 0$.B. $P = 2$.C. $P = 6$.D. $P = -2$.

Câu 157. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(4;2;2)$, $B(1;1;-1)$, $C(2;-2;-2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất

A. $M(2;3;1)$.B. $M(0;3;1)$.C. $M(0;-3;1)$.D. $M(0;1;2)$.

Câu 158. (THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN - ĐÀ NẴNG - LẦN 1 - 2018) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;-3;7)$, $B(0;4;1)$, $C(3;0;5)$ và $D(3;3;3)$. Gọi M là điểm nằm trên mặt phẳng (Oyz) sao cho biểu thức $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó tọa độ của M là:

A. $M(0;1;-4)$.B. $M(2;1;0)$.C. $M(0;1;-2)$.D. $M(0;1;4)$.

Câu 159. (TOÁN HỌC TUỔI TRẺ - THÁNG 4 - 2018) Trong không gian cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-1;2;1)$, $C(3;6;-5)$. Điểm M thuộc mặt phẳng Oxy sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất là

A. $M(1;2;0)$.

B. $M(0;0;-1)$.

C. $M(1;3;-1)$.

D. $M(1;3;0)$.

Câu 160. (LÊ QUÝ ĐÔN - HẢI PHÒNG - LẦN 1 - 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(3;2;1)$, $B(-2;3;6)$. Điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) . Tìm giá trị của biểu thức $T = x_M + y_M + z_M$ khi $|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}|$ nhỏ nhất.

A. $-\frac{7}{2}$.

B. $\frac{7}{2}$.

C. 2.

D. -2.

Câu 161. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC - LẦN 3 - 2018) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình là $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 6z + 7 = 0$. Cho ba điểm A, M, B nằm trên mặt cầu (S) sao cho $\widehat{AMB} = 90^\circ$. Diện tích tam giác AMB có giá trị lớn nhất bằng?

A. 4.

B. 2.

C. 4π .

D. Không tồn tại.

Câu 162. (THPT PHAN ĐÌNH PHÙNG - HÀ TĨNH - LẦN 1 - 2018) Cho a, b, c, d, e, f là các số thực thỏa mãn $\begin{cases} (d-1)^2 + (e-2)^2 + (f-3)^2 = 1 \\ (a+3)^2 + (b-2)^2 + c^2 = 9 \end{cases}$. Gọi giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$F = \sqrt{(a-d)^2 + (b-e)^2 + (c-f)^2}$ lần lượt là M, m . Khi đó, $M - m$ bằng

A. 10.

B. $\sqrt{10}$.

C. 8.

D. $2\sqrt{2}$.

Câu 163. (THPT LÊ XOAY - LẦN 3 - 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;2;-2)$; $B(3;-3;3)$. Điểm M trong không gian thỏa mãn $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$. Khi đó độ dài OM lớn nhất bằng

A. $6\sqrt{3}$.

B. $12\sqrt{3}$.

C. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

D. $5\sqrt{3}$.

Câu 164. (THPT NGUYỄN TẮT THÀNH - YÊN BÁI - 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0;-1;3)$, $B(-2;-8;-4)$, $C(2;-1;1)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14$. Gọi $M(x_M; y_M; z_M)$ là điểm trên (S) sao cho biểu thức $|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P = x_M + y_M$.

A. $P = 0$.

B. $P = \sqrt{14}$.

C. $P = 6$.

D. $P = 3\sqrt{14}$.

PHẦN B. LỜI GIẢI THAM KHẢO

Dạng 1. Tìm tọa độ điểm, véc tơ liên quan đến hệ trục tọa độ OXYZ

Câu 1. Chọn C

$\overrightarrow{AB} = (2-1; 2-1; 1-(-2))$ hay $\overrightarrow{AB} = (1;1;3)$.

Câu 2. Chọn B

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(3;1;-1)$ trên trục Oy có tọa độ là $(0;1;0)$.

Câu 3. Chọn D

Gọi I là trung điểm của AB , ta có tọa độ điểm I là

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = 2 \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = -1 \\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = 5 \end{cases}$$

Vậy $I(2; -1; 5)$.

Câu 4. Chọn B

Gọi $D(x; 0; 0) \in Ox$

$$AD = BC \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + 16} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$$

Câu 5. Chọn A

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (1; 2; 3)$$

Câu 6. Chọn C

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; 1; -1)$ trên trục Oy có tọa độ là $(0; 1; 0)$.

Câu 7. Chọn C

$$OA = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3.$$

Câu 8.

Lời giải

Chọn B

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(3; -1; 1)$ trên trục Oz có tọa độ là $(0; 0; 1)$

Câu 9. Chọn A

Tọa độ trung điểm I của đoạn AB với $A(3; -2; 3)$ và $B(-1; 2; 5)$ được tính bởi

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = 1 \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = 0 \\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow I(1; 0; 4)$$

Câu 10. Chọn D

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; 1; -1)$ trên trục Oz có tọa độ là: $(0; 0; -1)$.

Câu 11. Chọn D

$M \in (Oxz) \Rightarrow M(x; 0; z)$; $\overrightarrow{AB} = (7; 3; 1) \Rightarrow AB = \sqrt{59}$; $\overrightarrow{AM} = (x+2; -3; z-1)$ và

$$A, B, M \text{ thẳng hàng} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AB} \quad (k \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = 7k \\ -3 = 3k \\ z-1 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -9 \\ -1 = k \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow M(-9; 0; 0).$$

$$\overrightarrow{BM} = (-14; -6; -2); \overrightarrow{AM} = (-7; -3; -1) \Rightarrow BM = 2AB.$$

Câu 12.

Lời giải

Chọn B

Khi chiếu vuông góc một điểm trong không gian lên mặt phẳng (Oyz) , ta giữ lại các thành phần tung độ và cao độ nên hình chiếu của $A(3; -1; 1)$ lên (Oyz) là điểm $N(0; -1; 1)$.

Câu 13. Chọn B

Ta có: $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c} = (1 - 2 + 2.4; 2 - 2 + 2.0; 3 + 1 + 2.(-4)) = (7; 0; -4)$.

Câu 14. Chọn B

• Xét đáp án A: $\vec{a} + \vec{b} = (3; -3; -3)$ đúng.

• Xét đáp án B: $\vec{a} = 2(1; -1; -2) \neq \vec{b} = (1; -1; 1)$. Suy ra $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương.

Đáp án B sai.

Câu 15. Hai điểm $A(0; 1; -1), B(2; 3; 2)$. Vector $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là $(2; 2; 3)$.

Câu 16. Chọn B

Cho hai điểm $A(3; -2; 3)$ và $B(-1; 2; 5)$.

$$\text{Trung điểm } I \text{ có tọa độ: } \begin{cases} \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3 + (-1)}{2} = 1 \\ \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{(-2) + 2}{2} = 0 \\ \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{3 + 5}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow I(1; 0; 4).$$

Câu 17. Ta có: $\vec{a} - \vec{b} = (2 - 1; 3 - 1; 2 + 1) = (1; 2; 3)$.

Câu 18. Ta có: $2\vec{a} = (4; -6; 6), 3\vec{b} = (0; 6; -3), -2\vec{c} = (-6; 2; -10) \Rightarrow \vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c} = (-2; 2; -7)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = 2 \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = 1 \\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow I(2; 1; 3).$$

Câu 20. Có $\overrightarrow{AB} = (2; -2; 5), \overrightarrow{AC} = (x + 1; y - 2; 1)$.

$$A, B, C \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{5} \\ y = \frac{8}{5} \end{cases} \Rightarrow x + y = 1.$$

Câu 21. $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k} \Rightarrow \vec{a}(-1; 2; -3)$.

Câu 22. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC bằng

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{1 - 1 + 0}{3} = 0 \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{-2 + 2 + 0}{3} = 0 \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{3 + 5 + 1}{3} = 3 \end{cases} \Rightarrow G(0; 0; 3)$$

Câu 23. Có $2\vec{a} = (4; -6; 6); 3\vec{b} = (0; 6; -3); -2\vec{c} = (-6; 2; -10)$.

Khi đó: $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c} = (-2; 2; -7)$.

Câu 24. Tọa độ trung điểm I của AB là

$$\begin{cases} x_I = \frac{1+3}{2} = 2 \\ y_I = \frac{3-1}{2} = 1 \\ z_I = \frac{2+4}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow I(2;1;3).$$

Câu 25. Trung điểm M có tọa độ là $\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1 \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{5-3}{2} = 1 \\ z_M = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{2+2}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow M(1;1;2).$

Câu 26. Ta có: $2\vec{y} = (2;0;-2).$

$$\vec{a} = \vec{x} + 2\vec{y} = (2+2;1+0;-3-2) = (4;1;-5).$$

Câu 27. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB , ta có: $\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+2}{2} = 2 \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-4+2}{2} = -1 \\ z_M = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{3+7}{2} = 5 \end{cases} \Rightarrow M(2;-1;5).$

Câu 28. Gọi $D(x; y; z)$. Để $ABCD$ là hình bình hành

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow (1;3;-7) = (-3-x;1-y;2-z) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \\ z = 9 \end{cases} \Leftrightarrow D(-4;-2;9).$$

Câu 29. Tọa độ trọng tâm G là

$$\begin{cases} x_G = \frac{1+2+3}{3} = 2 \\ y_G = \frac{3-1+1}{3} = 1 \\ z_G = \frac{4+0+2}{3} = 2 \end{cases} \Rightarrow G(2;1;2).$$

Câu 30. Giả sử $G(x, y, z)$.

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC suy ra

$$\begin{cases} x = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ z = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5+(-2)+0}{3} = 1 \\ y = \frac{-2+3+2}{3} = 1 \\ z = \frac{0+0+3}{3} = 1 \end{cases} \Rightarrow G(1;1;1).$$

Câu 31. $A(2;-1;0), B(1;1;-3)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (1-2;1+1;-3-0) = (-1;2;-3).$$

Câu 32. Gọi $D(x; y; z)$.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Ta có $\overrightarrow{AD} = (x-1; y; z)$ và $\overrightarrow{BC} = (-1; 0; 1)$.

Suy ra $x = 0; y = 0; z = 1$.

Vậy $D(0; 0; 1)$.

Câu 33. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; 2)$.

Câu 34. Mặt phẳng tọa độ (Oyz) có phương trình là $x = 0 \Rightarrow N(0; 4; -1) \in (Oyz)$.

Câu 35. Ta có $\vec{i} = (1; 0; 0), \vec{j} = (0; 1; 0), \vec{k} = (0; 0; 1)$.

Do đó, $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (1; 1; -1)$.

Câu 36. Hình chiếu của $M(4; 5; 6)$ xuống mặt phẳng (Oyz) là $M'(0; 5; 6)$.

Câu 37. Nếu M' đối xứng với M qua mặt phẳng (Oxz) thì $M'(x; -y; z)$. Do đó phương án A sai.

Nếu M' đối xứng với M qua Oy thì $M'(-x; y; -z)$. Do đó phương án B sai.

Nếu M' đối xứng với M qua gốc tọa độ O thì $M'(-x; -y; -z)$. Do đó phương án D sai.

Câu 38. Theo định nghĩa ta có $\vec{i} = (1; 0; 0), \vec{j} = (0; 1; 0)$ và $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Do đó, $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} \Leftrightarrow \vec{u} = (2; 3; -1)$.

Câu 39. Gọi I là trung điểm MN . Ta có:

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_M + x_N}{2} = \frac{1+1}{2} = 1 \\ y_I = \frac{y_M + y_N}{2} = \frac{-2+0}{2} = -1 \\ z_I = \frac{z_M + z_N}{2} = \frac{2+4}{2} = 3 \end{cases}$$

Vậy $I(1; -1; 3)$.

Câu 40. Có $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$, gọi $\vec{c} = (c_1; c_2; c_3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = 2.1 + (-1) = 1 \\ c_2 = 2.2 + 3 = 7 \\ c_3 = 2.1 + 0 = 2 \end{cases}$$

Vậy $\vec{c} = (1; 7; 2)$

Câu 41. Chọn **A**.

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB . Khi đó ta có:
$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-3+5}{2} = 1 \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{4+6}{2} = 5 \end{cases} \Rightarrow I(1; 5).$$

Câu 42. Chọn **D**.

Áp dụng công thức tính tích có hướng trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ ta được:

$$\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] = (2; -6; -1)$$

Vậy chọn đáp án **D**

Câu 43. Chọn A

+) Ta có $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \Leftrightarrow \vec{a}(x; y; z)$ nên $\vec{a}(-1; 2; -3)$. Do đó Chọn A

Câu 44. Chọn C

Gọi I là trung điểm của đoạn AB . Ta có

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+2}{2} = 2 \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-4+2}{2} = -1 \\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{3+9}{2} = 6 \end{cases} \Rightarrow I(2; -1; 6).$$

Câu 45. $\overline{AB} = (2; 3; -3) \Rightarrow AB = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{22}$.

Câu 46. Chọn A

Trung điểm M có tọa độ là

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1 \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{5-3}{2} = 1 \\ z_M = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{2+2}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow M(1; 1; 2).$$

Câu 47. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \ (k > 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = k \\ m-1 = 3k \\ 3 = k(-2n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ m = 7 \\ n = -\frac{3}{4} \end{cases}$. Vậy $m = 7; n = -\frac{3}{4}$

Câu 48. Giả sử $B(x_B; y_B; z_B)$.

Vì M là trung điểm của AB nên ta có:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \\ z_M = \frac{z_A + z_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = \frac{-1 + x_B}{2} \\ 1 = \frac{5 + y_B}{2} \\ -2 = \frac{3 + z_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 5 \\ y_B = -3 \\ z_B = -7 \end{cases}. \text{ Vậy } B(5; -3; -7).$$

Câu 49. Chọn D

Gọi $D(x_D; y_D; z_D)$ cần tìm

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_B - x_A = x_C - x_D \\ y_B - y_A = y_C - y_D \\ z_B - z_A = z_C - z_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 1 = -3 - x_D \\ -1 - 2 = 5 - y_D \\ 3 - (-1) = 1 - z_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -4 \\ y_D = 8 \\ z_D = -3 \end{cases}.$$

Suy ra: $D(-4; 8; -3)$.

Câu 50. Chọn A

Gọi $E(x; y; z)$

Ta có: $\overrightarrow{CE} = (x-7; y-4; z+2); 2\overrightarrow{EB} = (2-2x; 4-2y; -6-2z)$

$$\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB} \Leftrightarrow \begin{cases} x-7=2-2x \\ y-4=4-2y \\ z+2=-6-2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=\frac{8}{3} \\ z=-\frac{8}{3} \end{cases}$$

Câu 51. Chọn D

$$\begin{cases} 1 = \frac{1+2+a}{3} \\ c = \frac{-3-4-2}{3} \\ 3 = \frac{3+5+b}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1 \\ c=-3 \end{cases}$$

Vậy $a+b+c=-2$

Câu 52. Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; -4; 2)$, $\overrightarrow{AM} = (x-2; y+1; -4)$

$$A, B, M \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-4} = \frac{-4}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=7 \end{cases}$$

Câu 53. Chọn D

$$\text{Tứ giác } ABCD \text{ là hình bình hành} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -3 - x_D \\ 3 = 1 - y_D \\ 10 = 4 - z_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -4 \\ y_D = -2 \\ z_D = -6 \end{cases}$$

Vậy $D(-4; -2; -6)$.

Câu 54. Gọi H là hình chiếu của M lên mặt phẳng $(Oyz) \Rightarrow H(0; 2; 3)$

Gọi M' là điểm đối xứng với $M(1; 2; 3)$ qua mặt phẳng (Oyz)

$\Rightarrow H$ là trung điểm của $MM' \Rightarrow M'(-1; 2; 3)$.

Câu 55. Ta có: $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} \Leftrightarrow \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_D = x_A + x_C - x_B \\ y_D = y_A + y_C - y_B \\ z_D = z_A + z_C - z_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 1 + 0 - 2 \\ y_D = -2 + 3 - 1 \\ z_D = 0 + 4 + 2 \end{cases} \Rightarrow D(-1; 0; 6).$$

Câu 56. Gọi $M(x; y; z)$. Vì M thuộc đoạn AB nên:

$$\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x = -2(2-x) \\ 1-y = -2(-3-y) \\ -2-z = -2(5-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ y = -\frac{5}{3} \\ z = \frac{8}{3} \end{cases}$$

Câu 57. Gọi $M(x; y; z)$. Ta có: $\overrightarrow{AM} = (x; y-1; z+2)$; $\overrightarrow{AB} = (3; -2; 3)$.

$$\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9 \\ y-1=-6 \\ z+2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9 \\ y=-5 \\ z=7 \end{cases}. \text{ Vậy } M(9; -5; 7).$$

Câu 58. Ta có $M \in (Oxy) \Rightarrow M(x; y; 0); \overrightarrow{AB} = (-2; 3; 1); \overrightarrow{AM} = (x-2; y+2; -1)$.

Để A, B, M thẳng hàng thì $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng phương, khi đó: $\frac{x-2}{-2} = \frac{y+2}{3} = \frac{-1}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-5 \end{cases}$.

Vậy $M(4; -5; 0)$.

Câu 59. Ta có $\vec{u} = (2; -2; 1)$

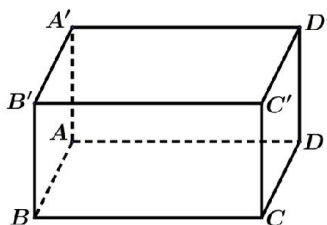
Khi đó $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3$ và $|\vec{v}| = \sqrt{m^2 + 2^2 + (m+1)^2} = \sqrt{2m^2 + 2m + 5}$

$$\text{Do đó } |\vec{u}| = |\vec{v}| \Leftrightarrow 9 = 2m^2 + 2m + 5 \Leftrightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=-2 \end{cases}$$

Vậy có 2 giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 60. Gọi $B(x; y; z)$

$$\text{Có } A(1; 2; -1) \overrightarrow{AB} = (1; 3; 1) = (x-1; y-2; z+1) \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=5 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow B(2; 5; 0)$$



Câu 61.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (a; 0; 0); \overrightarrow{AD} = (0; 2a; 0); \overrightarrow{AA'} = (0; 0; 2a)$.

Theo quy tắc hình hộp ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC'} = (a; 2a; 2a)$.

Suy ra $AC = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{a^2 + (2a)^2 + (2a)^2} = 3|a|$.

Vậy độ dài đoạn thẳng $AC' = 3|a|$.

Câu 62. Gọi $A(x; y; z), A'(x'; y'; z')$ là điểm đối xứng với điểm A qua trục Oy.

$$\text{Điểm } A' \text{ đối xứng với điểm } A \text{ qua trục } Oy \text{ nên } \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \\ z' = -z \end{cases}. \text{ Do đó } A' = (3; 1; -2).$$

Câu 63. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Ta có $G(1; 0; -2)$ và $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Ta có: $\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{C'C} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GC'} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = \vec{0}$.

$\Leftrightarrow G$ là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$.

Vậy tọa độ trọng tâm của tam giác $A'B'C'$ là $(1; 0; -2)$.

Câu 64. Gọi tọa độ điểm C là $(x; y; z)$

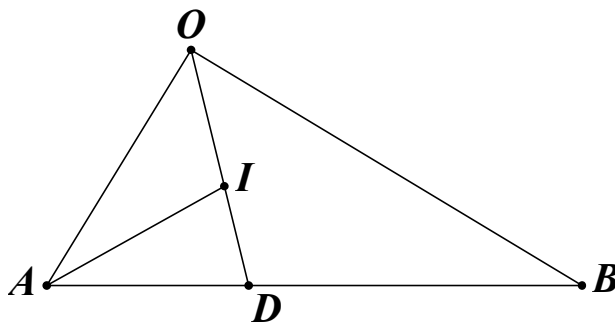
Vì ABCD là hình bình hành nên $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$

Ta có $\overrightarrow{DC} = (x-1; y+1; z-1)$ và $\overrightarrow{AB} = (1; 1; 1)$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x-1=1 \\ y+1=1 \\ z-1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ z=2 \end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm C là $(2; 0; 2)$.

Câu 65. Chọn D



Ta có $\overrightarrow{OA} = (1; 2; -2)$, $\overrightarrow{OB} = \left(\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$, do đó $OA = 3$, $OB = 4$.

Gọi D là chân đường phân giác trong kẻ từ O , ta có $\overrightarrow{DA} = -\frac{DA}{DB} \cdot \overrightarrow{DB} = -\frac{OA}{OB} \cdot \overrightarrow{DB}$, suy ra

$$\overrightarrow{DA} = -\frac{3}{4} \overrightarrow{DB} \Rightarrow \overrightarrow{OD} = \frac{4\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}}{7}. \text{ Do đó } D\left(\frac{12}{7}; \frac{12}{7}; 0\right).$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AD} = \left(\frac{5}{7}; -\frac{2}{7}; 2\right) \Rightarrow AD = \frac{15}{7}.$$

$$\overrightarrow{ID} = -\frac{AD}{AO} \cdot \overrightarrow{IO} = -\frac{5}{7} \overrightarrow{IO} \Rightarrow \overrightarrow{OI} = \frac{7}{12} \overrightarrow{OD} \Rightarrow D(1; 1; 0)$$

Do đó $a - b + c = 0$.

Câu 66. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA .

Do $\widehat{AMB} = \widehat{BMC} = \widehat{CMA} = 90^\circ$ nên các tam giác $\triangle AMB, \triangle BMC, \triangle CMA$ vuông tại M .

$$\text{Khi đó } IM = \frac{AB}{2}; JM = \frac{BC}{2}; KM = \frac{AC}{2}. \text{ Mặt khác } AB = BC = AC = 2\sqrt{2}.$$

Vậy $MI = MJ = MK = \sqrt{2}$. Khi đó M thuộc trục của đường tròn ngoại tiếp đáy IJK và cách (IJK) một khoảng không đổi là $\sqrt{2}$. Khi đó có hai điểm M thỏa mãn điều kiện trên.

Dạng 2. Tích vô hướng, tích có hướng và ứng dụng

Dạng 2.1 Tích vô hướng và ứng dụng

Câu 67. Chọn B

$$\text{Ta có: } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = -\frac{2}{5}.$$

Câu 68. Chọn C

$$\overrightarrow{MN}(-3; -2; 2); \overrightarrow{NP}(2; m-2; 1).$$

$$\text{Tam giác } MNP \text{ vuông tại } N \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NP} = 0 \Leftrightarrow -6 - 2(m-2) + 2 = 0 \Leftrightarrow m-2 = -2 \Leftrightarrow m = 0.$$

Câu 69. Chọn B

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-3; -5)$, $\overrightarrow{AC} = (2; -2)$.

$$\text{Khi đó: } \cos A = \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{-3 \cdot 2 + 5 \cdot 2}{\sqrt{34} \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{17}}.$$

Câu 70. Ta có $\vec{i} = (1; 0; 0)$.

$$\text{Vậy: } \cos(\vec{i}, \vec{u}) = \frac{\vec{i} \cdot \vec{u}}{|\vec{i}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{1 \cdot (-\sqrt{3}) + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1}{1 \cdot \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (\vec{i}, \vec{u}) = 150^\circ.$$

Câu 71. Chọn D

$$\text{Ta có: } \cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-3 \cdot 5 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 12}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 0^2} \cdot \sqrt{5^2 + 0^2 + 12^2}} = \frac{-3}{13}.$$

Câu 72. Ta có $\vec{i} = (1; 0; 0)$

$$\Rightarrow \cos(\vec{u}, \vec{i}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{i}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{i}|} = \frac{-\sqrt{3}}{2}. \text{ Vậy } (\vec{u}, \vec{i}) = 150^\circ.$$

Câu 73. Ta có $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 6$.

Câu 74. Gọi α là góc giữa hai vector $\vec{i}$ và $\vec{u} = (-\sqrt{3}; 0; 1)$, ta có:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{i} \cdot \vec{u}}{|\vec{i}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 150^\circ.$$

$$\text{Câu 75. Ta có } \overrightarrow{AB}(1; 5; -2); \overrightarrow{AC}(5; 4; -1). \cos \widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{5 + 20 + 2}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{42}} = \frac{9}{2\sqrt{35}}.$$

$$\text{Câu 76. Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-1; 2; -3) \\ \overrightarrow{BC} = (-7; -5; -1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow \text{tam giác } ABC \text{ vuông tại } B.$$

$\Rightarrow$ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là trung điểm của cạnh huyền AC .

$$\Rightarrow I\left(1; -\frac{1}{2}; 3\right). \text{ Vậy } a + 2b + c = 3.$$

Câu 77. Chọn C

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1; 0; 1)$, $\overrightarrow{AC} = (1; 1; 1) \Rightarrow (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0 \Rightarrow AB \perp AC$.

$$\text{Nên diện tích tam giác } ABC \text{ là } S = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{Câu 78. } + (\vec{u}, \vec{v}) = 45^\circ \Leftrightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{1 - 2m}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{1 + m^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{3(m^2 + 1)} = 1 - 2m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2m \geq 0 \\ 3m^2 + 3 = 1 - 4m + 4m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{2} \\ m^2 - 4m - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2 - \sqrt{6}.$$

Dạng 2.2 Tích có hướng và ứng dụng

Câu 79. Ta có: $\overrightarrow{DA} = (3; -2; m - 3)$, $\overrightarrow{DB} = (2; 0; -3)$, $\overrightarrow{DC} = (0; 4; -3)$.

$$\text{Thể tích tứ diện: } V = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}] \cdot \overrightarrow{DA}| \Leftrightarrow 8 = \frac{1}{6} |24 + 8(m - 3)| \Leftrightarrow \begin{cases} m = -6 \\ m = 6 \end{cases}.$$

Vì m dương nên $m = 6$. Do đó chọn D.

Câu 80. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1; 2; 3)$; $\overrightarrow{AC} = (-3; 3; 3)$; $\overrightarrow{AD} = (-1; 3; 1)$.

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-3; -12; 9);$$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = (-3) \cdot (-1) + (-12) \cdot 3 + 9 \cdot 1 = -24.$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{6} |-24| = 4.$$

Câu 81. Chọn C

$$[\vec{u}, \vec{v}] = (-m-2; -m; m+1) \Rightarrow |[\vec{u}, \vec{v}]| = \sqrt{(m+2)^2 + m^2 + (m+1)^2} = \sqrt{3m^2 + 6m + 5}$$

$$|[\vec{u}, \vec{v}]| = \sqrt{14} \Leftrightarrow 3m^2 + 6m + 5 = 14 \Leftrightarrow 3m^2 + 6m - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases}.$$

Câu 82. Chọn A.

Do $D \in Oy \Rightarrow D(0; y; 0)$, khi đó: $\overrightarrow{DA} = (2; -1 - y; 1)$, $\overrightarrow{DB} = (3; -y; -1)$, $\overrightarrow{DC} = (2; -1 - y; 3)$.

Khi đó $[\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}] = (1 + 2y; 5; y + 3)$

$$\text{Và } V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}] \cdot \overrightarrow{DC}| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 2y + 6 = 30 \\ 2y + 6 = -30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 12 \\ y = -18 \end{cases}.$$

Vậy $y_1 + y_2 = 12 - 18 = -6$.

Câu 83. Ta có

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{u}| = \sqrt{(1+1)^2 + (-2+1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{4+1+4} = 3 \text{ (đúng).}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 + 3 \cdot (-1) = 1 - 2 - 3 = -4 \text{ (đúng).}$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{u}| = \sqrt{(1-1)^2 + (-2-1)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{0+9+16} = 5 \text{ (đúng).}$$

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-1; 4; 3) \text{ (sai).}$$

Câu 84. Ta tính

$$\overrightarrow{AB} = (0; 2; -1); \overrightarrow{AC} = (-1; 1; 2); \overrightarrow{AD} = (-3; m+2; n); [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (5; 1; 2)$$

$$\text{Bốn điểm } A, B, C, D \text{ đồng phẳng} \Leftrightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \Leftrightarrow m + 2n = 13$$

$$\text{Câu 85. } [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = (-1; -3; -1)$$

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}]| = \frac{1}{2} \sqrt{1+9+1} = \frac{\sqrt{11}}{2}.$$

$$\text{Câu 86. Ta có: } [\vec{m}, \vec{n}] = (3; -4; 0).$$

Vì $\vec{p}$ là véc tơ cùng hướng với $[\vec{m}, \vec{n}]$ nên $\vec{p} = k \cdot [\vec{m}, \vec{n}] = (3k; -4k; 0)$, $k > 0$.

$$\text{Ta có: } |\vec{p}| = 15 \Leftrightarrow \sqrt{9k^2 + 16k^2} = 15 \Leftrightarrow \begin{cases} k = -3 \\ k = 3 \end{cases}.$$

So sánh với điều kiện $k > 0 \Rightarrow k = 3 \Rightarrow \vec{p} = (9; -12; 0)$.

$$\text{Câu 87. } \overrightarrow{AC} = (-3; 1; -2); \overrightarrow{AB} = (-1; -1; -4); \overrightarrow{AD} = (-4; 1; 0).$$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-6; -10; 4).$$

$$\text{Thể tích khối tứ diện là: } V = \frac{1}{6} \cdot |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{6} |14| = \frac{7}{3}.$$

$$\overrightarrow{AB} = (1; 2; -3); \quad \overrightarrow{CD} = (-5; -3; 1)$$

Câu 88. $\overrightarrow{AC} = (3; 3; -3); \quad \overrightarrow{BD} = (-3; -2; 1)$

$$\overrightarrow{AD} = (-2; 0; -2)$$

$$\text{Ta có: } [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (3; -6; -3) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = (-2) \cdot 3 + 0 \cdot 6 + (-2) \cdot (-3) = 0.$$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ đồng phẳng hay bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng. Vậy đáp án A sai.

$$\text{Lại có } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 3 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 + (-3) \cdot (-2) = 0 \Rightarrow AC \perp AD.$$

$\Rightarrow$ tam giác ACD là tam giác vuông tại A . Vậy đáp án B đúng.

Mặt khác: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 1 \cdot (-5) + 2 \cdot (-3) + (-3) \cdot 1 = -14 < 0 \Rightarrow \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) < 0 \Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ là góc tù. Vậy đáp án C đúng.

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{14} \text{ hay } AB = BD \Rightarrow \text{tam giác } ABD \text{ là tam giác cân tại } B. \text{ Vậy đáp án D đúng.}$$

Câu 89. Ta có $AD \parallel BC \Rightarrow AD$ nhận $\overrightarrow{CB} = (5; 2; -1)$ là một VTCP.

$$\text{Kết hợp với } AD \text{ qua } A(-2; 3; 1) \Rightarrow AD: \begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = 3 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \Rightarrow D(5t - 2; 2t + 3; 1 - t).$$

$$\text{Biến đổi } S_{ABCD} = 3S_{ABC} \Leftrightarrow S_{ACD} = 2S_{ABC} \quad (1)$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (4; -2; -1) \\ \overrightarrow{AC} = (-1; -4; 0) \\ \overrightarrow{AD} = (5t; 2t; -t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-4; 1; -18) \\ [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = (4t; -t; 18t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_{ABC} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = \frac{1}{2} \sqrt{(-4)^2 + 1^2 + (-18)^2} = \frac{\sqrt{341}}{2} \\ S_{ACD} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]| = \frac{1}{2} \sqrt{(4t)^2 + (-t)^2 + (18t)^2} = \frac{|t| \sqrt{341}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Kết hợp với (1) ta được } \frac{|t| \sqrt{341}}{2} = \sqrt{341} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \Rightarrow D(8; 7; -1) \\ t = -2 \Rightarrow D(-12; -1; 3) \end{cases}$$

$$\text{Với } D(8; 7; -1) \Rightarrow \overrightarrow{AD} = (10; 4; -2) = 2\overrightarrow{CB} = -2\overrightarrow{BC}.$$

$$\text{Với } D(-12; -1; 3) \Rightarrow \overrightarrow{AD} = (-10; -4; 2) = -2\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{BC}.$$

Hình thang $ABCD$ có đáy AD thì $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{BC}$ với $k > 0$.

Do đó chỉ có $D(-12; -1; 3)$ thỏa mãn.

Dạng 3. Mặt cầu

Dạng 3. Xác định tâm, bán kính của mặt cầu

Câu 90. Chọn A

Phương trình mặt cầu tổng quát: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \Rightarrow R = 2\sqrt{2}$.

Câu 91. Chọn D

Câu 92. Chọn A

Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + m = 0$ là một phương trình mặt cầu

$$\Leftrightarrow 1^2 + 1^2 + 2^2 - m > 0 \Leftrightarrow m < 6.$$

Câu 93. Chọn B

Phương trình mặt cầu tâm $I(a; b; c)$, bán kính R có dạng:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \Rightarrow R = 3.$$

Câu 94. Chọn B

Tâm của (S) có tọa độ là $(-3; -1; 1)$.

Câu 95. Chọn C

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính R .Nên mặt cầu $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 20$ có tâm và bán kính là $I(1; -2; 4), R = 2\sqrt{5}$.

Câu 96. Chọn A

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 7 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2 \cdot (-1) \cdot x + 2 \cdot 0 \cdot y - 2 \cdot 1 \cdot z - 7 = 0.$$

$$\Rightarrow a = -1, b = 0, c = 1, d = -7.$$

$$\Rightarrow \text{Tâm mặt cầu } I(-1; 0; 1) \text{ bán kính } R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 7} = 3.$$

Câu 97.

lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } R = IA = \sqrt{(1-1)^2 + (2-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5}$$

vậy phương trình mặt cầu tâm I và đi qua điểm A có phương trình là

$$(x-x_I)^2 + (y-y_I)^2 + (z-z_I)^2 = R^2 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$$

Câu 98. Chọn D

$$\text{Ta có } R = \sqrt{1^2 + (-1)^2 - (-7)} = 3.$$

Câu 99. Chọn D

$$\text{Ta có } (S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 7 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 9$$

Vậy bán kính của mặt cầu bằng 3.

Câu 100. Chọn B

Mặt cầu đã cho có phương trình dạng $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ có bán kính là

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 7} = 3$$

$$\text{Câu 101. Ta có: } x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 16.$$

Vậy mặt cầu (S) có tâm $I(4; -1; 0)$ và bán kính $R = 4$.

$$\text{Câu 102. } (S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 9.$$

Vậy bán kính của mặt cầu (S) là $R = 3$.

$$\text{Câu 103. } (S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 1 = 0$$

$$\Rightarrow I(4; -1; 0)$$

$$R = 4.$$

Câu 104. Mặt cầu (S) có tâm là $I(-3; -1; 1)$.

Câu 105. Ta có: $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z - 3 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$.

Từ đó suy ra mặt cầu (S) có tâm là: $(-1; 2; 1)$.

Câu 106. Phương trình mặt cầu: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ ($a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$) có tâm $I(a; b; c)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

Ta có $a = 4, b = -5, c = 3, d = 49$. Do đó $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = 1$.

Câu 107. Chọn B

Từ phương trình mặt cầu suy ra tâm của mặt cầu là $(2; -1; 3)$.

Câu 108. Mặt cầu đã cho có tâm $I(1; -2; 3)$ và bán kính $R = 2$.

Câu 109. Chọn D.

Giả sử phương trình mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ ($a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$)

Ta có: $a = -2, b = 1, c = 0, d = -4 \Rightarrow$ Bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = 3$.

Câu 110. Chọn B

Tâm của (S) có tọa độ là $(3; -1; 1)$.

Câu 111. Chọn D

Phương trình đã cho là phương trình mặt cầu khi và chỉ khi

$$(m+2)^2 + (m-1)^2 - 3m^2 + 5 > 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m - 10 < 0$$

$$\Leftrightarrow -1 - \sqrt{11} < m < 1 + \sqrt{11}$$

Theo bài ra $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\} \Rightarrow$ có 7 giá trị của m nguyên thỏa mãn bài toán.

Câu 112. Điều kiện để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2(m+2)x + 4my + 19m - 6 = 0$ là phương trình mặt cầu là: $(m+2)^2 + 4m^2 - 19m + 6 > 0 \Leftrightarrow 5m^2 - 15m + 10 > 0 \Leftrightarrow m < 1$ hoặc $m > 2$.

Câu 113. Ta có $x^2 + y^2 + z^2 + 4mx + 2my - 2mz + 9m^2 - 28 = 0$

$$\Leftrightarrow (x+2m)^2 + (y+m)^2 + (z-m)^2 = 28 - 3m^2 \quad (1).$$

$$(1) \text{ là phương trình mặt cầu } \Leftrightarrow 28 - 3m^2 > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{\frac{28}{3}} < m < \sqrt{\frac{28}{3}}.$$

Do m nguyên nên $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.

Vậy có 7 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 114. Đường tròn lớn có chu vi bằng 8π nên bán kính của (S) là $\frac{8\pi}{2\pi} = 4$.

Từ phương trình của (S) suy ra bán kính của (S) là $\sqrt{2^2 + 1^2 + a^2 - 10a}$.

$$\text{Do đó: } \sqrt{2^2 + 1^2 + a^2 - 10a} = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 11 \end{cases}.$$

Câu 115. Cách 1: Tìm tọa độ tâm mặt cầu suy ra bán kính.

Gọi $I(x; y; z)$ và R lần lượt là tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.

$$\text{Ta có: } IO = IA = IB = IC = R \Rightarrow \begin{cases} IO^2 = IA^2 \\ IO^2 = IB^2 \\ IO^2 = IC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = (x+1)^2 + y^2 + z^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (z-2)^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y+3)^2 + z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \\ z = 1 \end{cases}.$$

$$I\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; 1\right) \Rightarrow R = IO = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

Cách 2: Tìm phương trình mặt cầu suy ra bán kính.

Gọi phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện OABC là: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$.

$$\text{Do (S) đi qua bốn điểm } A, B, C, O \text{ nên ta có: } \begin{cases} 1 + 2a + d = 0 \\ 4 - 4c + d = 0 \\ 9 + 6b + d = 0 \\ d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -\frac{3}{2} \\ c = 1 \\ d = 0 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \text{bán kính của (S) là: } R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

Cách 3: Sử dụng công thức tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp của tứ diện vuông.

Do tứ diện OABC có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc nên bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC

$$\text{là } R = \frac{1}{2}\sqrt{OA^2 + OB^2 + OC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1+4+9} = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

Câu 116.

Gọi $I(a; b; c)$ là tâm mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D. Khi đó:

$$\begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \\ AI^2 = DI^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2 + b^2 + c^2 = (a-1)^2 + (b-3)^2 + c^2 \\ (a-2)^2 + b^2 + c^2 = (a+1)^2 + b^2 + (c-3)^2 \\ (a-2)^2 + b^2 + c^2 = (a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-3)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 3b = -3 \\ a - c = -1 \\ a - 2b - 3c = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow I(0; 1; 1)$$

$$\text{Bán kính: } R = IA = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}.$$



Câu 117.

$$\text{Ta có: } MA = 3MB \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 = 9\overrightarrow{MB}^2 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 = 9(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 \Leftrightarrow IA^2 - 9IB^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} - 9\overrightarrow{IB}) = 8MI^2 \quad (1)$$

$$\text{Gọi } I \text{ thỏa mãn } \overrightarrow{IA} - 9\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BI} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB} \text{ nên } IB = \frac{1}{2}; IA = \frac{9}{2}.$$

$$\text{Từ (1) suy ra } \Leftrightarrow 8MI^2 = 18 \Leftrightarrow MI = \frac{3}{2} \text{ suy ra } M \in S\left(I; \frac{3}{2}\right).$$

Câu 118. Ta có điều kiện xác định mặt cầu là $a^2 + b^2 > c^2$

$$\Leftrightarrow (m+2)^2 + 4m^2 + m^2 - 5m^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m - 5 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -5 \\ m > 1 \end{cases}.$$

Câu 119. Gọi $I(a; b; c) \Rightarrow \overrightarrow{IA} = (-a; 1-b; 2-c); \overrightarrow{IH} = (4-a; -3-b; -2-c)$

$ABCD$ là tứ diện đều nên tâm I của mặt cầu ngoại tiếp trùng với trọng tâm tứ diện $\Rightarrow \overrightarrow{IA} = -3\overrightarrow{IH}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a = -3(4-a) \\ 1-b = -3(-3-b) \\ 2-c = -3(-2-c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow I(3; -2; -1).$$

Dạng 3. Viết phương trình mặt cầu

Câu 120.

lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } R = IA = \sqrt{(1-1)^2 + (2-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5}$$

vậy phương trình mặt cầu tâm I và đi qua điểm A có phương trình là

$$(x-x_I)^2 + (y-y_I)^2 + (z-z_I)^2 = R^2 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$$

Câu 121. Chọn A

Hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox là $I(1; 0; 0) \Rightarrow IM = \sqrt{13}$. Suy ra phương trình mặt cầu tâm I

bán kính IM là: $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 13$.

Câu 122. Gọi I là trung điểm AB ta có $I(-1; 3; 3)$ là tâm mặt cầu.

$$\text{Bán kính } R = IA = \sqrt{(1+1)^2 + (-2-3)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{45}.$$

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 45$.

Câu 123. Mặt cầu có tâm $I(1; -4; 3)$ và đi qua điểm $A(5; -3; 2)$ nên có bán kính $R = IA = 3\sqrt{2}$

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là: $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z-3)^2 = 18$.

Câu 124. Gọi I là tâm của mặt cầu đường kính AB .

Khi đó $I(1; 0; 2)$.

$$\text{Bán kính của mặt cầu là: } R = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(1-1)^2 + (-1-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Vậy phương trình mặt cầu là: $(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 2$.

Câu 125. Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow I(0; 3; -1)$.

$$\overrightarrow{IA} = (2; 1; 2) \Rightarrow IA = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3.$$

Mặt cầu đã cho có tâm I , đường kính AB nên có phương trình là $x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 9$.

Câu 126. Chọn A

Đáp án B vì không có số hạng y^2 . Đáp án C loại vì có số hạng $2xy$. Đáp án D loại vì

$$a^2 + b^2 + c^2 - d = 1 + 1 + 4 - 8 = -2 < 0.$$

Đáp án A thỏa mãn vì $a^2 + b^2 + c^2 - d = 1 + 0 + 4 + 1 = 6 > 0$.

Câu 19: [2H3-1.3-1] Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -1; -3)$; $B(0; 3; -1)$. Phương trình của mặt cầu đường kính AB là:

- A. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 6$ B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 24$
 C. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 24$ D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 6$

Lời giải

Chọn D

Tâm I mặt cầu là trung điểm của AB

$$I(1;1;-2) \text{ bán kính } R = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \sqrt{4+16+4} = \frac{1}{2} \sqrt{24}$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 6$$

Câu 127. Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ là phương trình của một mặt cầu nếu $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

Câu 128. Tọa độ tâm mặt cầu là $I(3;3;1)$, bán kính $R = IA = 3$.

Câu 129. Phương trình mặt cầu tâm $I(2;1;-2)$ bán kính $R = 2$ có hai dạng:

$$\text{Chính tắc: } (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 2^2$$

$$\text{Tổng quát: } x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 4z + 5 = 0.$$

Vậy đáp án đúng là B.

Câu 130. Vì mặt cầu (S) có tâm $A(2;1;0)$, đi qua điểm $B(0;1;2)$ nên mặt cầu (S) có tâm $A(2;1;0)$ và nhận độ dài đoạn thẳng AB là bán kính.

$$\text{Ta có: } \overline{AB} = (-2;0;2). \quad AB = |\overline{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}. \text{ Suy ra: } R = 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy: } (S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 8.$$

Vậy chọn đáp án B

Câu 131.

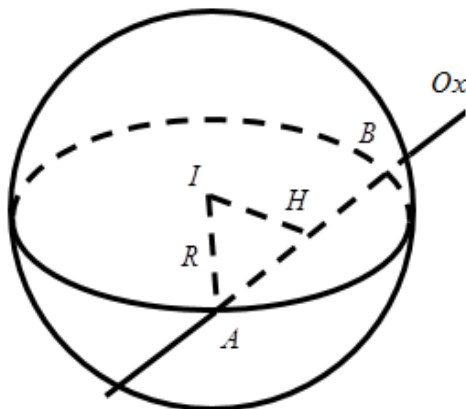
lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } R = IA = \sqrt{(1-1)^2 + (2-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5}$$

vậy phương trình mặt cầu tâm I và đi qua điểm A có phương trình là

$$(x-x_I)^2 + (y-y_I)^2 + (z-z_I)^2 = R^2 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$$



Câu 132.

Gọi H là trung điểm AB suy ra H là hình chiếu vuông góc của I lên Ox nên $H(1;0;0)$.

$$IH = \sqrt{13} \Rightarrow R = IA = \sqrt{IH^2 + AH^2} = 4.$$

$$\text{Phương trình mặt cầu là: } (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16.$$

Câu 133. Với điểm $M(1; -2; 3)$ thì hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox là $I(1; 0; 0)$

Có $IM = \sqrt{13}$ vậy phương trình mặt cầu tâm $I(1; 0; 0)$ bán kính IM là: $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 13$

Câu 134. Ta có mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ có bán kính là $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$

Trong đáp án C ta có:
$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = -1 \\ d = 2 \end{cases} \Rightarrow R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{4} = 2.$$

Câu 135. Gọi $I(a; 0; 0) \in Ox \Rightarrow \overline{IA}(1-a; 1; 2); \overline{IB}(3-a; 2; -3).$

Do (S) đi qua hai điểm A, B nên $IA = IB \Leftrightarrow \sqrt{(1-a)^2 + 5} = \sqrt{(3-a)^2 + 13} \Leftrightarrow 4a = 16 \Leftrightarrow a = 4$

$\Rightarrow (S)$ có tâm $I(4; 0; 0)$, bán kính $R = IA = \sqrt{14}.$

$\Rightarrow (S): (x-4)^2 + y^2 + z^2 = 14 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2 = 0.$

Câu 136. Ta có: $S = 4\pi R^2 = 4\pi \Leftrightarrow R = 1$

Vậy (S) tâm $I(1; 1; 1)$ bán kính $R = 1$ có pt: $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$

Câu 137. Gọi phương trình mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 (a^2 + b^2 + c^2 - d > 0)$

Vì mặt cầu đi qua 4 điểm nên:

$$\begin{cases} 18 - 6a - 6b + d = 0 \\ 18 - 6a - 6c + d = 0 \\ 18 - 6b - 6c + d = 0 \\ 27 - 6a - 6b - 6c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6a - 6b + d = -18 \\ -6a - 6c + d = -18 \\ -6b - 6c + d = -18 \\ -6a - 6b - 6c + d = -27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = \frac{3}{2} \\ c = \frac{3}{2} \\ d = 0 \end{cases}$$

Suy ra tâm $I\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$ bán kính $R = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$

Vậy phương trình mặt cầu $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}.$

Câu 138. Chọn A

Gọi $I(1; 1; 0), R = 2. II' = 10.$

Gọi R' là bán kính của mặt cầu (S') . Theo giả thiết, ta có $R' + R = II' \Leftrightarrow R' = II' - R = 8.$

Khi đó phương trình mặt cầu $(S'): (x-9)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 64.$

Câu 139. Gọi $I(a; b; c)$ là tâm của mặt cầu (S) . Mặt cầu (S) tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ

$$d(I, (Oxy)) = d(I, (Oyz)) = d(I, (Oxz)) \Leftrightarrow |a| = |b| = |c| = R \quad (1)$$

Mặt cầu (S) đi qua $A(1; -1; 4)$

$$\Rightarrow \begin{cases} IA = R \\ a > 0; c > 0; b < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = R^2 \\ a > 0; c > 0; b < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + (b+1)^2 + (c-4)^2 = R^2 \\ a = c = -b = R > 0 \quad (do(1)) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + (-a+1)^2 + (a-4)^2 = a^2 \\ a=c=-b=R>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 - 12a + 18 = 0 \\ a=c=-b=R>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 6a + 9 = 0 \\ a=c=-b=R>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=c=3 \\ b=-3 \\ R=3 \end{cases} \Rightarrow (S): (x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2 = 9.$$

Câu 140. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác OMN .

Ta áp dụng tính chất sau: “Cho tam giác OMN với I là tâm đường tròn nội tiếp, ta có $a\overrightarrow{IO} + b\overrightarrow{IM} + c\overrightarrow{IN} = \vec{0}$, với $a = MN$, $b = ON$, $c = OM$ ”.

Ta có $OM = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$, $ON = \sqrt{\left(\frac{-8}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = 4$.

$$MN = \sqrt{\left(\frac{-8}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{8}{3} - 1\right)^2} = 5.$$

$$5\overrightarrow{IO} + 4\overrightarrow{IM} + 3\overrightarrow{IN} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{5 \cdot 0 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot \left(\frac{-8}{3}\right)}{3 + 4 + 5} = 0 \\ y_I = \frac{5 \cdot 0 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)}{3 + 4 + 5} = 1 \\ z_I = \frac{5 \cdot 0 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)}{3 + 4 + 5} = 1 \end{cases}.$$

Mặt phẳng (Oxz) có phương trình $y = 0$.

Mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz) nên mặt cầu có bán kính $R = d(I, (Oxz)) = 1$.

Vậy phương trình mặt cầu là: $x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$.

Câu 141. Vì mặt cầu tâm I tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ nên

$$d(I, (Oyz)) = d(I, (Ozx)) = d(I, (Oxy)) \Leftrightarrow |a| = |b| = |c| \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ a = b = -c \\ a = -b = c \\ a = -b = -c \end{cases}$$

Nhận thấy chỉ có trường hợp $a = -b = c$ thì phương trình $AI = d(I, (Oxy))$ có nghiệm, các trường hợp còn lại vô nghiệm.

Thật vậy:

Với $a = -b = c$ thì $I(a; -a; a)$

$$AI = d(I, (Oyx)) \Leftrightarrow (a-1)^2 + (a-1)^2 + (a-4)^2 = a^2 \Leftrightarrow a^2 - 6a + 9 = 0 \Leftrightarrow a = 3$$

Khi đó $P = a - b + c = 9$.

Dạng 3. Một số bài toán khác

Câu 142. Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(0; 0; \sqrt{2})$ và bán kính $R = \sqrt{3}$; $A \in (Oxy) \Rightarrow A(a; b; 0)$.

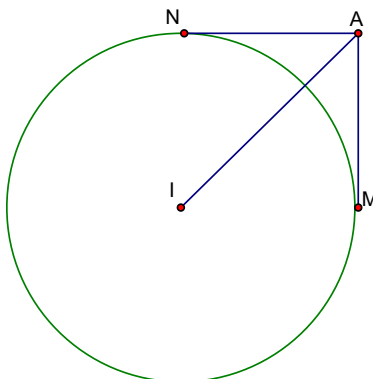
* Xét trường hợp $A \in (S)$, ta có $a^2 + b^2 = 1$. Lúc này các tiếp tuyến của (S) thuộc tiếp diện của (S) tại A nên có vô số các tiếp tuyến vuông góc nhau.

Trường hợp này ta có 4 cặp giá trị của $(a; b)$ là $\begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}; \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \end{cases}; \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}; \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$.

* Xét trường hợp A ở ngoài (S) . Khi đó, các tiếp tuyến của (S) đi qua A thuộc mặt nón đỉnh A . Nên các tiếp tuyến này chỉ có thể vuông góc với nhau tại A .

Điều kiện để có ít nhất 2 tiếp tuyến vuông góc là góc ở đỉnh của mặt nón lớn hơn hoặc bằng 90° .

Giả sử $A'N; A'M$ là các tiếp tuyến của (S) thỏa mãn $AN \perp AM$ ($N; M$ là các tiếp điểm)



Dễ thấy $A'NIM$ là hình vuông có cạnh $IN = R = \sqrt{3}$ và $IA' = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{6}$.

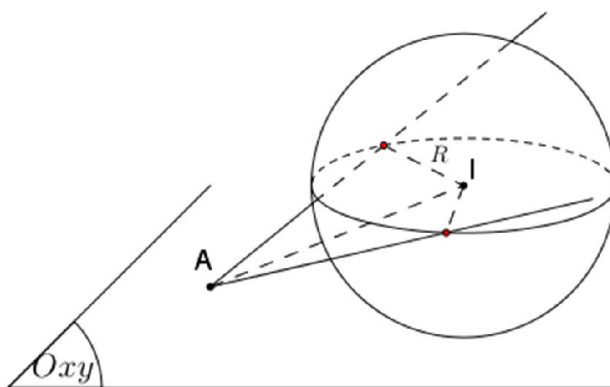
Điều kiện phải tìm là $\begin{cases} IA > R \\ IA \leq IA' = \sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 > 1 \\ a^2 + b^2 \leq 4 \end{cases}$

Vì a, b là các số nguyên nên ta có các cặp nghiệm $(a; b)$ là

$(0; 2), (0; -2), (2; 0), (-2; 0), (1; 1), (-1; -1), (-1; 1), (1; -1)$.

Vậy có 12 điểm A thỏa mãn yêu cầu.

Câu 143. Chọn A



Mặt cầu có tâm $I(0;0;1)$, bán kính $R = \sqrt{5}$.

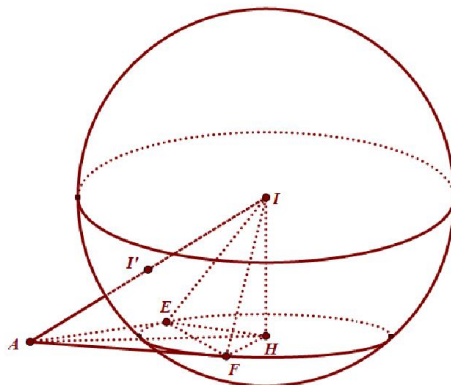
Vì $A \in (Oxy)$ nên $c = 0$. Các giao tuyến của A đến mặt cầu (nếu $IA > R$) tạo nên một mặt nón tâm A , để

mặt nón này có hai đường sinh vuông góc thì góc của mặt nón này phải $\geq 90^\circ$ hay $IA \leq R\sqrt{2}$.

Vậy $R \leq IA \leq R\sqrt{2} \Leftrightarrow 5 \leq a^2 + b^2 + 1 \leq 10 \Leftrightarrow 4 \leq a^2 + b^2 \leq 9$

Ta có các bộ số thỏa mãn $(0; \pm 2); (0; \pm 3); (\pm 1; \pm 2); (\pm 2; \pm 2); (\pm 2; \pm 1); (\pm 2; 0); (\pm 3; 0)$, 20 bộ số.

Câu 144. Chọn A



Mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z+1)^2 = 5$ có tâm $I(0;0;-1)$ và có bán kính $R = \sqrt{5}$

$A(a;b;0) \in (Oxy)$, Gọi I' là trung điểm của $AI \Rightarrow I'\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

Gọi E, F lần lượt là hai tiếp điểm của tiếp tuyến đi qua A sao cho $AE \perp AF$.

Ta có: E, F cùng thuộc mặt cầu (S') đường kính IA có tâm $I'\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, bán kính $R' = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 1}$.

Để tồn tại E, F thì hai mặt cầu (S) và (S') phải cắt nhau suy ra $|R - R'| \leq II' \leq R + R'$

$$\Leftrightarrow \left| \sqrt{5} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 1} \right| \leq \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 1} \leq \sqrt{5} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5} \leq \sqrt{a^2 + b^2 + 1} \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 4(1)$$

Gọi H là hình chiếu của I trên (AEF) khi đó tứ giác $AEHF$ là hình vuông có cạnh $AE = HF = \sqrt{AI^2 - 5}$.

Ta có $IH^2 = R^2 - HF^2 = 5 - (AI^2 - 5) = 10 - AI^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 1 \leq 10 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \leq 9(2)$

Từ (1) và (2) ta có $4 \leq a^2 + b^2 \leq 9$ mà $a, b, c \in \mathbb{Z}$ nên có 20 điểm thỏa bài toán.

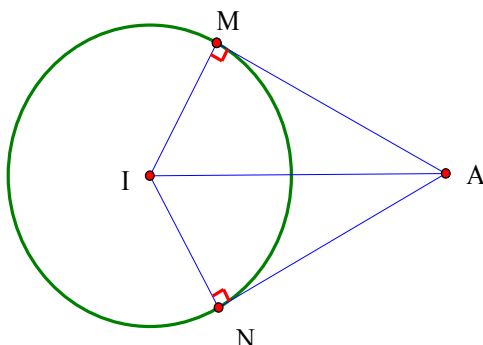
Cách khác:

Mặt cầu (S) có tâm $I(0,0,-1)$ bán kính $R = \sqrt{5}$. Ta có $d_{(I(Oxy))} = 1 < R \Rightarrow$ mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (Oxy) . Để có tiếp tuyến của (S) đi qua $A \Leftrightarrow AI \geq R$ (1).

Có $A(a,b,c) \in (Oxy) \Rightarrow A(a,b,0), IA = a^2 + b^2 + 1$.

Quỹ tích các tiếp tuyến đi qua A của (S) là một mặt nón nếu $AI > R$ và là một mặt phẳng nếu $AI = R$.

Trong trường hợp quỹ tích các tiếp tuyến đi qua A của (S) là một mặt nón gọi AM, AN là hai tiếp tuyến sao cho A, M, I, N đồng phẳng.



Tồn tại ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$$\widehat{MAN} \geq 90^\circ \Leftrightarrow IA \leq R\sqrt{2} \quad (2).$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow 4 \leq a^2 + b^2 \leq 9$. Vì $a, b \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 0 \\ b^2 = 9 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a^2 = 0 \\ b^2 = 4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 4 \end{cases}.$$

Bốn hệ phương trình đầu tiên có hai nghiệm, ba hệ sau có 4 nghiệm suy ra số điểm A thỏa mãn là $4.2 + 3.4 = 20$.

Câu 145. Chọn D

Nhận thấy điểm M nằm bên trong mặt cầu (S) . Để $AB = \sqrt{R^2 - d^2(O, \Delta)}$ nhỏ nhất khi $d(O, \Delta)$ lớn nhất.

Ta thấy $d(O, \Delta) \leq OM = \text{const}$. Dấu '=' xảy ra khi $\Delta \perp OM$.

$$\text{Suy ra } \vec{u} \cdot \vec{OM} = 0 \text{ và } \vec{u} \cdot \vec{n}_p = 0 \text{ nên } \begin{cases} 1 + a + b = 0 \\ 1 + a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$$

Suy ra $T = a - b = -1$.

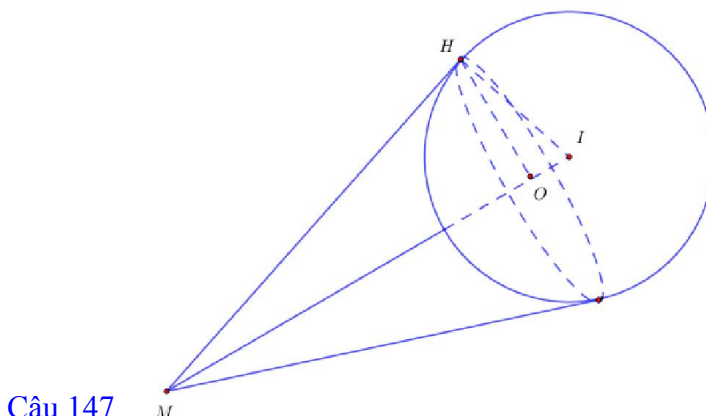
Câu 146. Vì các điểm M, N, P đều nằm trên đoạn AB sao cho $AM = MN = NP = PB$

$$\text{Do đó ta có } \begin{cases} BM = 3MA \\ BN = NA \\ 3BP = PA \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d(B, Oxy) = 3d(A, Oxy) \\ d(B, Oxz) = d(A, Oxz) \\ 3d(B, Oyz) = d(A, Oyz) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |c| = |3.4| \\ |b| = |-3| \\ 3|a| = |9| \end{cases}$$

Để M, N, P đều nằm trên đoạn AB thì hai điểm A và B không nằm về cùng 1 phía so với lần lượt các mặt phẳng Oxy, Oxz, Oyz

Do đó $B(-12, 3, -3)$

Vậy $ab + bc + ac = -9$



Câu 147.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 1; 0)$ và bán kính $R = 2$.

Ta có $\vec{IM} = (1; 2; 1)$ và $IM = \sqrt{6}$.

Gọi H là một tiếp điểm tùy ý khi kẻ tiếp tuyến từ $Oxyz$ đến mặt cầu, khi đó $MH = \sqrt{IM^2 - R^2} = \sqrt{2}$. Gọi O là tâm của đường tròn (C) khi đó $IM \perp HO$ và $HO = r$.

$$\text{Ta có } HI \cdot HM = HO \cdot IM \Rightarrow r = \frac{HI \cdot HM}{IM} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

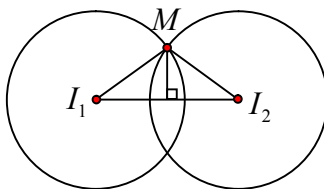
Câu 148. Gọi $M(x; y; z)$ là tập hợp các điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ta có

$$\vec{AM} = (x; y + 1; z - 2), \vec{BM} = (x - 2; y + 3; z), \vec{CM} = (x + 2; y - 1; z - 1), \vec{DM} = (x; y + 1; z - 3).$$

Từ giả thiết: $\overline{MA.MB} = \overline{MC.MD} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{MA.MB} = 1 \\ \overline{MC.MD} = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2) + (y+1)(y+3) + z(z-2) = 1 \\ x(x+2) + (y+1)(y-1) + (z-1)(z-3) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4z + 1 = 0 \end{cases}$$

Suy ra quỹ tích điểm M là đường tròn giao tuyến của mặt cầu tâm $I_1(1; -2; 1)$, $R_1 = 2$ và mặt cầu tâm $I_2(-1; 0; 2)$, $R_2 = 2$.



Ta có: $I_1I_2 = \sqrt{5}$.

Dễ thấy: $r = \sqrt{R_1^2 - \left(\frac{I_1I_2}{2}\right)^2} = \sqrt{4 - \frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{2}$.

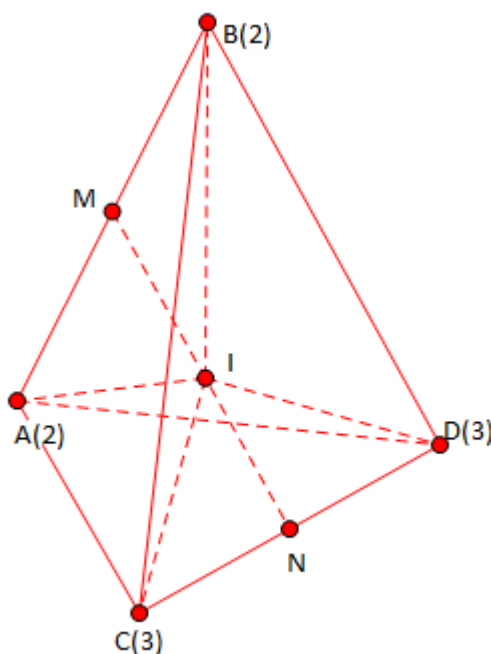
Câu 149. Cách 1:

Gọi A, B, C, D là tâm bốn mặt cầu, không mất tính tổng quát ta giả sử $AB = 4$, $AC = BD = AD = BC = 5$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD . Dễ dàng tính được $MN = 2\sqrt{3}$. Gọi I là tâm mặt cầu nhỏ nhất với bán kính r tiếp xúc với bốn mặt cầu trên. Vì $IA = IB, IC = ID$ nên I nằm trên đoạn MN .

Đặt $IN = x$, ta có $IC = \sqrt{3^2 + x^2} = 3 + r$, $IA = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3} - x)^2} = 2 + r$

Từ đó suy ra $\sqrt{3^2 + x^2} - \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3} - x)^2} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{12\sqrt{3}}{11}$, suy ra $r = \sqrt{3^2 + \left(\frac{12\sqrt{3}}{11}\right)^2} - 3 = \frac{6}{11}$

Cách 2



Gọi A, B là tâm quả cầu bán kính bằng 2. C, D là tâm quả cầu bán kính bằng 3. I là tâm quả cầu bán kính x .

Mặt cầu (I) tiếp xúc ngoài với 4 mặt cầu tâm A, B, C, D nên $IA = IB = x + 2$, $IC = ID = x + 3$.

Gọi (P) , (Q) lần lượt là các mặt phẳng trung trực đoạn AB và CD .

$$\begin{cases} IA = IB \Rightarrow I \in (P) \\ IC = ID \Rightarrow I \in (Q) \end{cases} \Rightarrow I \in (P) \cap (Q) \quad (1).$$

Tứ diện $ABCD$ có $DA = DB = CA = CB = 5$ suy ra MN là đường vuông góc chung của AB và CD , suy ra $MN = (P) \cap (Q)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $I \in MN$

$$\text{Tam giác } IAM \text{ có } IM = \sqrt{IA^2 - AM^2} = \sqrt{(x+2)^2 - 4}.$$

$$\text{Tam giác } CIN \text{ có } IN = \sqrt{IC^2 - CN^2} = \sqrt{(x+3)^2 - 9}.$$

$$\text{Tam giác } ABN \text{ có } NM = \sqrt{NA^2 - AM^2} = \sqrt{12}.$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{(x+3)^2 - 9} + \sqrt{(x+2)^2 - 4} = \sqrt{12} \Rightarrow x = \frac{6}{11}.$$

Dạng 4. Bài toán cực trị

Câu 150. Chọn C

Ta có: $\overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{k} \Rightarrow M(a; 0; b)$

$$\overrightarrow{MA} = (-1-a; 2; 3-b); \overrightarrow{MB} = (6-a; -5; 8-b) \Rightarrow -2\overrightarrow{MB} = (-12+2a; 10; -16+2b)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = (a-13; 12; b-13)$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}| = \sqrt{(a-13)^2 + 12^2 + (b-13)^2} \geq 12$$

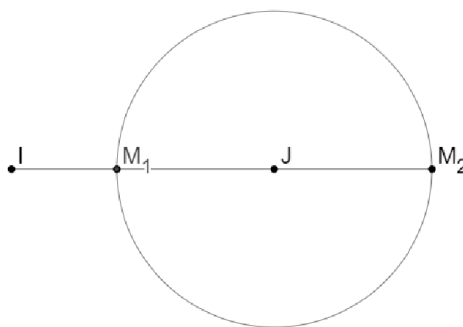
$$\text{Vậy } |\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}|_{\min} = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 13 \\ b = 13 \end{cases}. \text{ Do đó } a - b = 0$$

Câu 151. Ta thấy $M(a; b; 0) \in (Oxy)$.

Gọi $I\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 2\right)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB , ta có

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IM})^2 + (\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IM})^2 \\ &= (\overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IM}^2 - 2\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IM}) + (\overrightarrow{IB}^2 + \overrightarrow{IM}^2 - 2\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IM}) \\ &= IM^2 + 2IA^2 - 2\overrightarrow{IM}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) = IM^2 + \frac{AB^2}{2} = IM^2 + 7. \end{aligned}$$

Bởi vậy $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow IM$ ngắn nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (Oxy) . Bởi vậy $M\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$. Như vậy $a = \frac{3}{2}, b = \frac{1}{2} \Rightarrow a + b = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$.



Câu 152.

Gọi I là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

$$\Rightarrow I(2x_A - x_B; 2y_A - y_B; 2z_A - z_B)$$

$$\Rightarrow I(5; 5; -1).$$

Suy ra I là điểm cố định.

Suy ra P đạt giá trị nhỏ nhất khi MI đạt giá trị nhỏ nhất, P đạt giá trị lớn nhất khi MI đạt giá trị lớn nhất.

$$(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9 \text{ có tâm } J(1; 2; -1) \text{ và bán kính } R = 3$$

$$\text{Suy ra } IJ = 5$$

Mà M là điểm thay đổi trên (S)

Do đó:

$$\min MI = IM_1 = IJ - R = 5 - 3 = 2$$

$$\max MI = IM_2 = IJ + R = 5 + 3 = 8$$

$$\text{Suy ra } m - n = 8^2 - 2^2 = 60$$

Câu 153. Xét điểm $I(a; b; c)$ thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$. Khi đó $I\left(\frac{7}{4}; \frac{7}{2}; 0\right)$.

$$\text{Ta có } MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID})^2$$

$$= 4MI^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}) + IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2$$

$$= 4MI^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 \geq IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 \text{ (vì } MI^2 \geq 0 \text{ với mọi điểm } M)$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow M \equiv I \text{ tức là } M\left(\frac{7}{4}; \frac{7}{2}; 0\right) \Rightarrow x + y + z = \frac{7}{4} + \frac{7}{2} = \frac{21}{4}.$$

Câu 154. Gọi điểm E thỏa $\overrightarrow{EA} - 2\overrightarrow{EB} = \vec{0}$. Suy ra B là trung điểm của AE , suy ra $E(3; -4; 5)$.

$$\text{Khi đó: } MA^2 - 2MB^2 = (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA})^2 - 2(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EB})^2 = -ME^2 + EA^2 - 2EB^2.$$

$$\text{Do đó } MA^2 - 2MB^2 \text{ lớn nhất } \Leftrightarrow ME \text{ nhỏ nhất } \Leftrightarrow M \text{ là hình chiếu của } E(3; -4; 5) \text{ lên } (Oxy)$$

$$\Leftrightarrow M(3; -4; 0).$$

Chú ý: Ta có thể làm trắc nghiệm như sau

+ Loại C vì $M(0; 0; 5)$ không thuộc (Oxy) .

+ Lần lượt thay $M\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$, $M\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; 0\right)$, $M(3; -4; 0)$ vào biểu thức $MA^2 - 2MB^2$ thì $M(3; -4; 0)$ cho

giá trị lớn nhất nên ta chọn $M(3; -4; 0)$.

Câu 155. Xét điểm I sao cho: $2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$. Giả sử $I(x; y; z)$, ta có:

$$\overrightarrow{IA}(4-x; 3-y; 1-z), \overrightarrow{IB}(3-x; 1-y; 3-z).$$

$$\text{Do đó: } 2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(4-x) = 3-x \\ 2(3-y) = 1-y \\ 2(1-z) = 3-z \end{cases} \Leftrightarrow I(5; 5; -1).$$

$$\text{Do đó: } P = 2MA^2 - MB^2 = 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$$

$$= 2\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{IA}^2 + 4\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} - (\overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IB}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB})$$

$$= \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{IA}^2 - \overrightarrow{IB}^2 + 2\overrightarrow{MI}(2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}) = MI^2 + 2IA^2 - IB^2 + 2\overrightarrow{MI}(2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB})$$

$$= MI^2 + 2IA^2 - IB^2.$$

Do I cố định nên IA^2, IB^2 không đổi. Vậy P lớn nhất (nhỏ nhất) $\Leftrightarrow MI^2$ lớn nhất (nhỏ nhất). $\Leftrightarrow MI$ lớn nhất (nhỏ nhất) $\Leftrightarrow M$ là giao điểm của đường thẳng IK (với $K(1; 2; -1)$ là tâm của mặt cầu (S)) với mặt cầu (S) .

Ta có: MI đi qua $I(5; 5; -1)$ và có vector chỉ phương là $\overrightarrow{KI}(4; 3; 0)$.

$$\text{Phương trình của } MI \text{ là: } \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 3t \\ z = -1. \end{cases}$$

Tọa độ điểm M cần tìm ứng với giá trị t là nghiệm của phương trình:

$$(1 + 4t - 1)^2 + (2 + 3t - 2)^2 + (-1 + 1)^2 = 9 \Leftrightarrow 25t^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{5} \\ t = -\frac{3}{5}. \end{cases}$$

$$\text{Với } t = \frac{3}{5} \Rightarrow M_1\left(\frac{17}{5}; \frac{19}{5}; -1\right) \Rightarrow M_1I = 2 \text{ (min).}$$

$$\text{Với } t = -\frac{3}{5} \Rightarrow M_2\left(-\frac{7}{5}; \frac{1}{5}; -1\right) \Rightarrow M_2I = 8 \text{ (max).} \text{ Vậy } \begin{cases} m = P_{\max} = 48 \\ n = P_{\min} = -12 \end{cases} \Rightarrow m - n = 60.$$

Câu 156. Gọi I là điểm thỏa $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow I(2; -2; 2)$.

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 = 3MI^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) \\ = 3MI^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2.$$

Mà $M \in (Oyz) \Rightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I lên (Oyz) $\Leftrightarrow M(0; -2; 2)$.

$$\text{Vậy } P = 0 - 2 + 2 = 0.$$

Câu 157. Gọi $I(x; y; z)$ là điểm thỏa $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OI}) + 2(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OI}) - (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OI}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) = (2; 3; 1) \Leftrightarrow I(2; 3; 1).$$

$$\text{Ta có } |\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| = |(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})| \\ = |2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC}| = 2|\overrightarrow{MI}| = 2MI.$$

$|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MI ngắn nhất, khi đó M là hình chiếu của $I(2; 3; 1)$ lên mặt phẳng (Oyz) . Suy ra $M(0; 3; 1)$.

Câu 158. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2; 7; -6)$, $\overrightarrow{AC} = (1; 3; -2)$, $\overrightarrow{AD} = (1; 6; -4)$ nên $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = -4 \neq 0$.

Suy ra: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng.

Gọi G là trọng tâm tứ diện $ABCD$. Khi đó $G(2; 1; 4)$.

$$\text{Ta có: } |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = |4\overrightarrow{MG}| = 4MG.$$

Do đó $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MG ngắn nhất.

Vậy M là hình chiếu vuông góc của G lên mặt phẳng (Oyz) nên $M(0;1;4)$.

Câu 159. Lấy $G(1;3;-1)$ là trọng tâm của tam giác ABC .

Ta có:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

Do đó $MA^2 + MB^2 + MC^2$ bé nhất khi MG bé nhất.

Hay M là hình chiếu của điểm G lên mặt phẳng Oxy .

Vậy $M(1;3;0)$.

Câu 160. Gọi điểm H thỏa mãn $\overrightarrow{HA} + 3\overrightarrow{HB} = \vec{0}$ khi đó:
$$\begin{cases} x_H = \frac{x_A + 3x_B}{1+3} \\ y_H = \frac{y_A + 3y_B}{1+3} \\ z_H = \frac{z_A + 3z_B}{1+3} \end{cases} \Rightarrow H\left(-\frac{3}{4}; \frac{11}{4}; \frac{19}{4}\right).$$

Phương trình mặt phẳng (Oxy) là $z = 0$.

Xét $T = \frac{z_H}{1} = \frac{19}{4}$ do đó tọa độ điểm M cần tìm là:
$$\begin{cases} x_M = x_H - aT \\ y_M = y_H - bT \\ z_M = z_H - cT \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{3}{4}; \frac{11}{4}; 0\right).$$

Vậy $T = x_M + y_M + z_M = -\frac{3}{4} + \frac{11}{4} + 0 = 2$.

Câu 161. Ta có $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 4 \Rightarrow (S)$ có tâm $I(1;1;3)$ và bán kính $R = 2$.

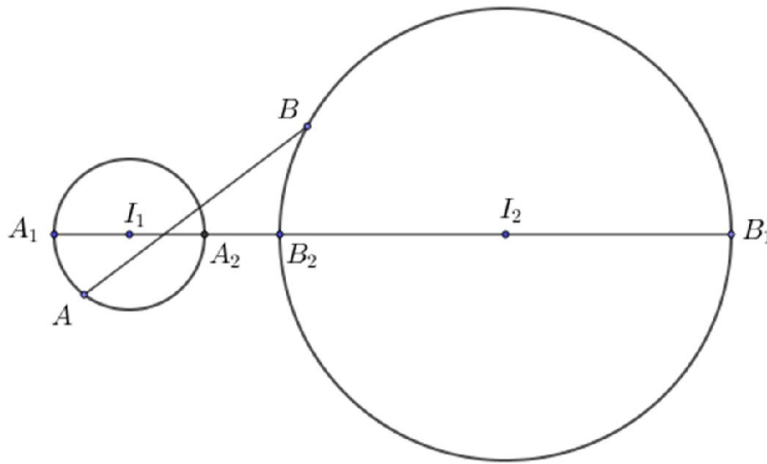
Bài ra A, M, B nằm trên mặt cầu (S) và $\widehat{AMB} = 90^\circ \Rightarrow AB$ qua $I \Rightarrow AB = 2R = 4$.

Ta có $S_{AMB} = \frac{1}{2}MA \cdot MB \leq \frac{MA^2 + MB^2}{4} = \frac{AB^2}{4} = 4$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow MA = MB = \frac{AB}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ và $AB = 4$.

Do đó diện tích tam giác AMB có giá trị lớn nhất bằng 4.

Câu 162. Gọi $A(d, e, f)$ thì A thuộc mặt cầu $(S_1): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1$ có tâm $I_1(1;2;3)$, bán kính $R_1 = 1$, $B(a, b, c)$ thì B thuộc mặt cầu $(S_2): (x+3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9$ có tâm $I_2(-3;2;0)$, bán kính $R_2 = 3$. Ta có $I_1I_2 = 5 > R_1 + R_2 \Rightarrow (S_1)$ và (S_2) không cắt nhau và ở ngoài nhau.



Dễ thấy $F = AB$, AB max khi $A \equiv A_1, B \equiv B_1 \Rightarrow$ Giá trị lớn nhất bằng $I_1I_2 + R_1 + R_2 = 9$.

AB min khi $A \equiv A_2, B \equiv B_2 \Rightarrow$ Giá trị nhỏ nhất bằng $I_1I_2 - R_1 - R_2 = 1$.

Vậy $M - m = 8$

Câu 163. Gọi $M(x; y; z)$.

$$\text{Ta có } \frac{MA}{MB} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3MA = 2MB \Leftrightarrow 9MA^2 = 4MB^2$$

$$\Leftrightarrow 9[(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2] = 4[(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2]$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 12y + 12z = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+6)^2 + (y-6)^2 + (z+6)^2 = 108.$$

Như vậy, điểm M thuộc mặt cầu (S) tâm $I(-6; 6; -6)$ và bán kính $R = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$.

Do đó OM lớn nhất bằng $OI + R = \sqrt{(-6)^2 + 6^2 + (-6)^2} + 6\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$.

Câu 164. Gọi $E(x; y; z)$ là điểm thỏa mãn $\vec{EA} - 2\vec{EB} + \vec{EC} = \vec{0}$

Ta có $(6-2x; 12-2y; 18-2z) = (0; 0; 0) \Rightarrow E(3; 6; 9)$.

$$|3\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}| = |2\vec{ME}|$$

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$

$$\text{Đường thẳng } EI \text{ có PTTS } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$$

$$M \in (IE) \Rightarrow M(1+t; 2+2t; 3+3t)$$

$$M \in (S) \Rightarrow 14t^2 = 14 \Rightarrow t = \pm 1$$

$$t = 1 \Rightarrow M_1(2; 4; 6), EM_1 = \sqrt{14}.$$

$$t = -1 \Rightarrow M_2(0; 0; 0), EM_2 = 3\sqrt{14} > EM_1.$$

Vậy $x_M + y_M = 2 + 4 = 6$.